



LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

część otwarta — przykładowy zestaw zadań

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją niecałkowite liczby wymierne $a_1, a_2, \dots, a_{67}$ o tej własności, że liczby

$$a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots, a_{66} \cdot a_{67}, a_{67} \cdot a_1$$

są całkowite.

Rozwiązanie. Tak, istnieją takie liczby.

Sposób 1. Podstawmy za liczby $a_1, a_2, \dots, a_{67}$ kolejno:

$$\underbrace{\frac{6}{7}, \frac{14}{3}, \frac{6}{7}, \frac{14}{3}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{14}{3}}_{66 \text{ liczb}}, \frac{21}{2}.$$

Wówczas $a_i \cdot a_{i+1} = 4$ dla $i = 1, 2, \dots, 65$, $a_{66} \cdot a_{67} = 49$ oraz $a_{67} \cdot a_1 = 9$.

Sposób 2. Wskażemy przykład niecałkowitych liczb wymiernych $a_1, a_2, \dots, a_{67}$, dla których każdy iloczyn $a_i \cdot a_j$, dla $1 \leq i < j \leq 67$, jest liczbą całkowitą. Niech $p_1, p_2, \dots, p_{67}$ będą najmniejszymi 67 liczbami pierwszymi. Ich iloczyn oznaczmy przez P i połóżmy $a_i = \frac{P}{p_i^2}$ dla $i = 1, 2, \dots, 67$. Wówczas dla każdego i liczba a_i jest wymierna i niecałkowita (licznik ułamka nie dzieli się przez p_i^2), zaś dla $i \neq j$ mamy $a_i \cdot a_j = \frac{P^2}{p_i^2 p_j^2}$, co jest liczbą całkowitą — licznik ułamka dzieli się przez $p_i^2 p_j^2$.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E różnym od A . Punkt J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BDE . Udowodnić, że $BJ = IJ$.

Rozwiązanie.

Sposób 1. Oznaczmy $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle CBA = \beta$. Obliczmy kąty:

$$\sphericalangle EBC = \sphericalangle EAC = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\sphericalangle JBI = \sphericalangle JBC + \sphericalangle CBI = \frac{1}{2}\sphericalangle EBC + \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta,$$

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle BAD - \sphericalangle DBA = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \beta,$$

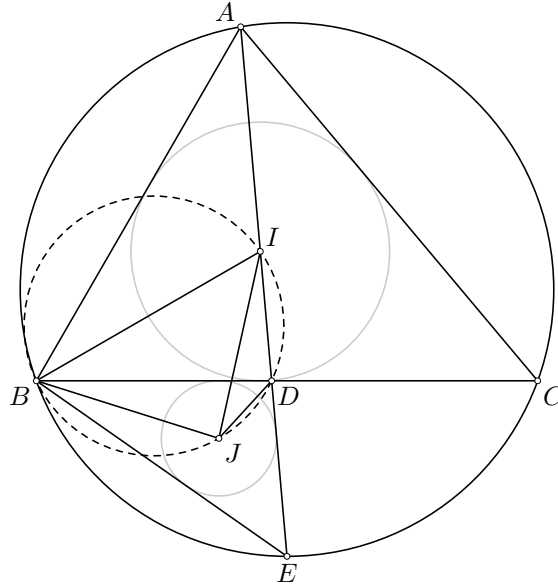
$$\sphericalangle BDJ = \frac{1}{2}\sphericalangle BDE = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ADB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right) = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta,$$

$$\sphericalangle IDJ = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDJ = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \beta + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 180^\circ - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\beta.$$

Wobec tego $\sphericalangle JBI + \sphericalangle IDJ = 180^\circ$. To oznacza, że czworokąt $BIDJ$ jest wpisany w okrąg. Zatem

$$\sphericalangle BIJ = \sphericalangle BDJ = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \sphericalangle JBI.$$

Powyższa równość oznacza, że trójkąt BIJ jest równoramienny i $BJ = IJ$.



Sposób 2. Z lematu o trójlściu wynika, że $BE = IE$. W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta między ramionami pokrywa się z symetralną przeciwległego boku. Zatem w trójkącie EBI dwusieczna kąta IEB , czyli prosta EJ , pokrywa się z symetralną odcinka BI . Stąd $BJ = IJ$.

Uwaga. Lemat o trójlściu wynika z następujących przeliczeń kątów:

$$\begin{aligned}\sphericalangle BIE &= 180^\circ - \sphericalangle AIB = \sphericalangle BAI + \sphericalangle IBA = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta, \\ \sphericalangle EBI &= \sphericalangle EBC + \sphericalangle CBI = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CBI = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta.\end{aligned}$$

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniające równości

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \quad \text{oraz} \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1.$$

Wykazać, że $|a_1| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

Rozwiązanie.

Sposób 1. Przekształcamy równoważnie tezę wykorzystując w paru miejscach rów-

ności dane w zadaniu:

$$\begin{aligned}
|a_1| &\leq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \\
a_1^2 &\leq \frac{n-1}{n} \\
na_1^2 &\leq n-1 \\
na_1^2 &\leq (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\
a_1^2 &\leq (n-1)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \\
(a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 &\leq (n-1)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \\
\left(\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n-1}\right)^2 &\leq \frac{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n-1} \\
\left|\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n-1}\right| &\leq \sqrt{\frac{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z nierówności trójkąta i z nierówności między średnimi arytmetyczną i kwadratową wynika, że

$$\left|\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n-1}\right| \leq \frac{|a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|}{n-1} \leq \sqrt{\frac{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n-1}}.$$

Sposób 2. Mamy

$$0 \leq \left(a_1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)^2 = a_1^2 - 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}a_1 + \frac{n-1}{n}$$

oraz

$$0 \leq \left(a_i + \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^2 = a_i^2 + 2\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}a_i + \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, n.$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned}
0 &\leq a_1^2 - 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}a_1 + \frac{n-1}{n} + \sum_{i=2}^n \left(a_i^2 + 2\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}a_i + \frac{1}{n(n-1)}\right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) - 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}a_1 + 2\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}\left(\sum_{i=2}^n a_i\right) + 1 = \\
&= 2 - 2(n-1)\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}a_1 + 2\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}(-a_1) = \\
&= 2 - 2n\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}a_1 = \\
&= 2 - 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}a_1,
\end{aligned}$$

skąd wynika, że $a_1 \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Do wykazania zostaje nierówność $a_1 \geq -\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Dowodzimy jej analogicznie, powtarzając powyższe rozumowanie dla liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ zastąpionych przez $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$.

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b , przy czym $a > b$, liczba $a - b$ jest pierwsza, a liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita. Wykazać, że liczba $\sqrt{2a + 2b - 1}$ również jest całkowita.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb a i b . Zapiszmy $a = dk, b = d\ell$, wtedy $k > \ell > 0$ i liczby k i ℓ są względnie pierwsze. Z założenia wynika, że liczba $ab = d^2 k\ell$ jest kwadratem liczby całkowitej, a skoro k i ℓ są względnie pierwsze, to k i ℓ muszą być kwadratami liczb całkowitych. Oznaczmy $k = m^2$ i $\ell = n^2$.

Oznaczmy $p = a - b$. Liczba $p = a - b = d(k - \ell) = d(m^2 - n^2) = d(m + n)(m - n)$ jest pierwsza. Oczywiście $m + n > m - n$, więc musi być $m + n = p$, $m - n = 1$, $d = 1$. Stąd obliczamy $m = \frac{p+1}{2}$, $n = \frac{p-1}{2}$. Zatem

$$2a + 2b - 1 = 2\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{p^2 + 2p + 1 + p^2 - 2p + 1}{2} - 1 = p^2.$$

Zatem $\sqrt{2a + 2b - 1} = p$.

5. Dany jest wielościan wypukły $\mathcal{W}$. Załóżmy, że każdy wierzchołek wielościanu $\mathcal{W}$ jest wierzchołkiem parzystej liczby ścian. Płaszczyzna Π przecina wewnątrz wielościanu $\mathcal{W}$ i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Przecięcie płaszczyzny Π i wielościanu $\mathcal{W}$ jest pewnym wielokątem. Wykazać, że ten wielokąt ma parzystą liczbę boków.

Rozwiązanie. Dla dowolnego wierzchołka A wielościanu $\mathcal{W}$ oznaczmy przez d_A liczbę ścian, których wierzchołkiem jest A . Zauważmy, że A jest końcem dokładnie d_A krawędzi wielościanu $\mathcal{W}$. Wynika to stąd, że każda taka ściana ma dwa boki o końcu A , a każda krawędź o końcu A jest bokiem dwóch ścian.

Niech X będzie zbiorem wierzchołków wielościanu $\mathcal{W}$ leżących po jednej stronie płaszczyzny Π , a Y — zbiorem pozostałych wierzchołków (czyli zbiorem wierzchołków leżących po drugiej stronie tej płaszczyzny). Niech k będzie liczbą krawędzi łączących dwa wierzchołki ze zbioru X , a ℓ — liczbą krawędzi łączących wierzchołki zbioru X z wierzchołkiem zbioru Y . Zauważmy, że

$$\sum_{A \in X} d_A = 2k + \ell. \quad (\spadesuit)$$

Rzeczywiście, liczba d_A jest liczbą krawędzi o końcu A . Lewa strona równości zlicza więc liczbę krawędzi, których któryś koniec jest w zbiorze X , przy czym krawędzie łączące dwa wierzchołki zbioru X są policzone dwukrotnie, a krawędzie łączące wierzchołek zbioru X z wierzchołkiem zbioru Y jednokrotnie.

Z założeń zadania wynika, że liczba d_A jest parzysta dla każdego wierzchołka A , a zatem z równości $(\spadesuit)$ wynika, że liczba ℓ jest parzysta. Pozostaje zauważyć, że ℓ jest liczbą wierzchołków (a zatem też liczbą boków) wielokąta będącego przecięciem płaszczyzny Π i wielościanu $\mathcal{W}$.