



LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

część otwarta — przykładowy zestaw zadań

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją niecałkowite liczby wymierne $a_1, a_2, \dots, a_{67}$ o tej własności, że liczby

$$a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots, a_{66} \cdot a_{67}, a_{67} \cdot a_1$$

są całkowite.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E różnym od A . Punkt J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BDE . Udowodnić, że $BJ = IJ$.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniające równości

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \quad \text{oraz} \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1.$$

Wykazać, że $|a_1| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b , przy czym $a > b$, liczba $a - b$ jest pierwsza, a liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita. Wykazać, że liczba $\sqrt{2a + 2b - 1}$ również jest całkowita.

5. Dany jest wielościan wypukły $\mathcal{W}$. Załóżmy, że każdy wierzchołek wielościanu $\mathcal{W}$ jest wierzchołkiem parzystej liczby ścian. Płaszczyzna Π przecina wnętrze wielościanu $\mathcal{W}$ i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Przecięcie płaszczyzny Π i wielościanu $\mathcal{W}$ jest pewnym wielokątem. Wykazać, że ten wielokąt ma parzystą liczbę boków.