



LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

część testowa — przykładowy zestaw zadań

1. Załóżmy, że $a + b + c = 4$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ oraz $a^3 + b^3 + c^3 = 34$. Wówczas

- | | |
|---|----------------------------------|
| T | a) $ab + bc + ca > 0$, |
| N | b) $abc < -7$, |
| N | c) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 4$. |

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2} \left((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \right) = \frac{1}{2}(4^2 - 14) = 1.$$

(b) Podobnie

$$56 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (ab^2 + ba^2 + bc^2 + cb^2 + ca^2 + ac^2),$$

czyli

$$ab^2 + ba^2 + bc^2 + cb^2 + ca^2 + ac^2 = 56 - 34 = 22.$$

Ponadto

$$64 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + ba^2 + bc^2 + cb^2 + ca^2 + ac^2) + 6abc = 34 + 66 + 6abc,$$

a stąd $abc = -6$.

(c) Zauważmy, że

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc = 1 - 4 + 1 - (-6) = 4.$$

Uwaga. Liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = \\ &= x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 3)(x - 2)(x + 1). \end{aligned}$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że jedynymi trójkami (a, b, c) spełniającymi warunki zadania są trójka $(3, 2, -1)$ oraz jej permutacje.

2. Rafał wybrał niezależnie 3 losowe liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$, przy czym za każdym razem prawdopodobieństwo wybrania każdej z dziesięciu liczb było równe $\frac{1}{10}$.

- ☐ T a) Prawdopodobieństwo, że wszystkie wybrane liczby były parzyste wynosi $\frac{1}{8}$,
- ☐ T b) Prawdopodobieństwo, że wśród wybranych liczb pojawiła się jedynka oraz dziesiątka jest większe niż prawdopodobieństwo, że wśród wybranych liczb pojawiły się dwie jedynki,
- ☐ T c) Prawdopodobieństwo, że wybrane przez Rafała liczby były parami różne jest większe od $\frac{7}{10}$.

Rozwiązanie.

(a) Prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej jest równe $5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$, zatem prawdopodobieństwo wylosowania trzech liczb parzystych jest równe $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

(b) Konfiguracji z dokładnie dwiema jedynkami jest $3 \cdot 9$. Uwzględniając konfigurację $(1, 1, 1)$ dostajemy 28 konfiguracji sprzyjających pierwszemu zdarzeniu. Natomiast konfiguracji z dokładnie jedną jedynką i dokładnie jedną dziesiątką jest $3 \cdot 2 \cdot 8 = 48 > 28$ (wybieramy miejsce dla 1 na trzy sposoby, miejsce dla 10 na dwa sposoby oraz trzecią liczbę na 8 sposobów).

(c) Konfiguracji sprzyjających temu zdarzeniu jest dokładnie $10 \cdot 9 \cdot 8$, zatem prawdopodobieństwo jest równe $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{72}{100} > \frac{7}{10}$.

3. Waldek narysował trójkąt, w którym środek okręgu wpisanego P pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego.

- ☐ N a) Trójkąt ten musi być prostokątny.
- ☐ T b) Trójkąt ten musi być równoramienny.
- ☐ T c) Ortocentrum tego trójkąta musi znajdować się w punkcie P .

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na tym trójkącie, a przez r promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa wynika, że każdy bok tego trójkąta ma długość $2\sqrt{R^2 - r^2}$. Jest to więc trójkąt równoboczny. W szczególności nie jest prostokątny, jest równoramienny i jego ortocentrum pokrywa się z P .

4. Ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots$ spełnia warunki $a_1 = 4$ oraz $a_{n+1} = 2a_n - 3$ dla każdego $n \geq 1$. Wówczas

- ☐ T a) $a_k = 67$ dla pewnego $k \geq 1$,
- ☐ T b) $a_{67} \cdot a_{69} > a_{68}^2$,
- ☐ T c) $\text{NWD}(a_{67}, a_{69}) = 1$.

Rozwiązanie.

a) Bezpośrednio obliczamy kolejne wartości ciągu:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	4	5	7	11	19	35	67

b) Oznaczmy $k = a_{67}$. Wtedy $a_{68} = 2k - 3$ i $a_{69} = 4k - 9$. Mamy więc

$$a_{67}a_{69} = k(4k - 9) = 4k^2 - 9k \quad \text{ i } \quad a_{68}^2 = (2k - 3)^2 = 4k^2 - 12k + 9.$$

Żądana nierówność redukuje się do nierówności $k > 3$. Jest to prawda — przez prostą indukcję można wykazać, że $a_n > 3$ dla każdego $n \geq 1$.

c) Jeśli liczba pierwsza p dzieli liczby a_{67} i a_{69} , to dzieli też liczbę $4a_{67} - a_{69} = 9$. Stąd $p = 3$. Tymczasem przez prostą indukcję można wykazać, że trójka nie dzieli żadnego wyrazu ciągu.

Uwaga. Łatwo wykazać przez indukcję, że $a_n = 2^{n-1} + 3$ dla $n \geq 1$.

5. Funkcja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ musi być stała, jeśli spełnia równanie:

- | | |
|---|--|
| N | a) $f(x) = f(2x)$ dla dowolnej liczby $x > 0$, |
| T | b) $f(x)f(y) = f(x) - f(y)$ dla dowolnych liczb $x, y > 0$, |
| T | c) $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych liczb $x, y > 0$. |

Rozwiązanie.

a) Funkcja f przyjmująca wartość 1, gdy x jest liczbą wymierną i 0 w przeciwnym przypadku spełnia żądany warunek i nie jest funkcją stałą.

b) Dany warunek dla $x = y$ przybiera postać $f(x)^2 = 0$, stąd $f(x) = 0$ dla każdego $x > 0$.

c) Dany warunek dla $x = y$ przybiera postać $f(x)^2 = 2f(x)$, skąd f może przyjmować jedynie wartości 0 i 2. Jeśli $f(x) = 0$ i $f(y) = 2$ dla pewnych $x, y > 0$, to nie jest spełniona żądana równość. Wniosek: f musi być funkcją stale równą 0 lub funkcją stale równą 2.

6. Równanie $xy + 2026 = x + y$ ma w liczbach całkowitych (x, y) :

- | | |
|---|---|
| N | a) więcej niż 30 rozwiązań, |
| N | b) rozwiązanie spełniające $xy < -5000$, |
| T | c) rozwiązanie spełniające $x + y = 2$. |

Rozwiązanie.

a) Równanie można przekształcić do postaci $(x - 1)(y - 1) = -2025 = -3^4 \cdot 5^2$. Każdy dzielnik prawej strony jest postaci $\pm 3^a 5^b$ dla pewnego doboru znaku $\pm$ oraz pewnych $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Takich dzielników jest zatem $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. Jest więc tylko 30 możliwych wartości liczby $x - 1$, a zatem tyleż samo możliwych wartości x . Dla każdej z nich wartość y wyznaczona jest jednoznacznie.

b) Nierówność $xy < -5000$ oznacza w szczególności, że $xy < 0$, tj. liczby x, y są różnych znaków. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x < 0 < y$. Rozumowanie z części a) daje w szczególności szacowanie $x - 1 \geq -2025$, tj. $x \geq -2024$. Z drugiej strony, $xy < -5000$ daje $x + y = xy + 2026 < -5000 + 2026 = -2974$, a skoro $y > 0$, to $x < -2974$. Sprzeczność.

c) $x = 46, y = -44$.

7. Liczba $100!$:

- ☐ T a) ma w zapisie dziesiętnym dokładnie 24 zera na końcu,
☐ N b) ma ostatnią niezerową cyfrę nieparzystą,
☐ T c) jest mniejsza od 2567^{50} .

Rozwiązanie.

a) Wśród liczb $1, 2, \dots, 100$ jest 20 liczb dzielących się przez 5, a wśród nich są cztery dzielące się przez 25. Żadna z nich nie dzieli się przez 125. Wobec tego w rozkładzie liczby $100!$ na czynniki pierwsze liczba 5 pojawi się dokładnie 24 razy. Poza tym dwójka wystąpi z wykładnikiem co najmniej 50 (bo wśród liczb $1, 2, \dots, 100$ jest 50 liczb parzystych). W takim razie liczba $100!$ dzieli się przez 10^{24} , ale nie dzieli się przez 10^{25} . Ma zatem w zapisie dziesiętnym dokładnie 24 zera na końcu.

b) Z rozumowania z części a) wynika w szczególności, że liczba $\frac{100!}{10^{24}}$ jest parzysta, ma więc parzystą cyfrę jedności.

c) Z nierówności między średnimi wynika, że

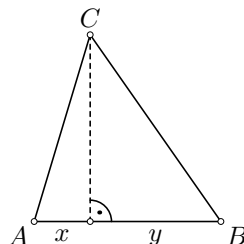
$$\sqrt[100]{100!} \leq \frac{1 + 2 + \dots + 100}{100} = 50,5.$$

Ponadto $50,5^2 = 2550,25 < 2567$. Wobec tego $100! \leq 50,5^{100} < 2567^{50}$.

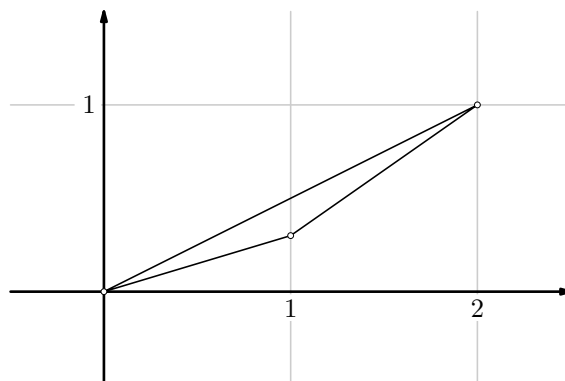
8. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość 1. Wysokość opuszczona z wierzchołka C na bok AB ma również długość 1. Wówczas

- ☐ T a) obwód trójkąta ABC jest większy od $\frac{16}{5}$,
☐ N b) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od $\frac{17}{5}$,
☐ T c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest mniejszy od $\frac{5}{16}$.

Rozwiązanie.



(a) Wysokość dzieli odcinek AB na odcinki długości x, y , zgodnie z rysunkiem. Mamy $x + y = 1$ oraz obwód trójkąta jest równy $1 + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}$. Wykażemy nierówność $\sqrt{5} \leq \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}$. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach $(0, 0), (1, x), (2, 2)$. Długości boków tego trójkąta to $\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+y^2}$ oraz $\sqrt{2^2 + (x+y)^2} = \sqrt{5}$, zatem nasza nierówność wynika z nierówności trójkąta.



Pozostaje zauważyć, że $1 + \sqrt{5} > \frac{16}{5}$.

(b) Dla $x = 0, y = 1$ obwód jest równy $2 + \sqrt{2} > \frac{17}{5}$. Odpowiada to trójkątowi prostokątnemu, który łatwo zaburzyć, aby otrzymać trójkąt ostrokątny o obwodzie przekraczającym $\frac{17}{5}$ (biorąc za x dostatecznie małą liczbę dodatnią). Przykładowo, dla $x = \frac{1}{120}$ i $y = \frac{119}{120}$ dostajemy trójkąt o obwodzie

$$1 + \sqrt{1 + \frac{1}{120^2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2} > 1 + 1 + \frac{\sqrt{119^2 + 120^2}}{120} = 2 + \frac{169}{120} > 2 + \frac{168}{120} = \frac{17}{5}.$$

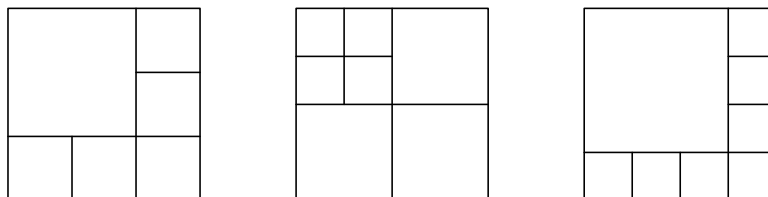
(c) Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2}$. Pole trójkąta jest iloczynem połowy obwodu i promienia okręgu wpisanego, zatem promień ten jest odwrotnością obwodu. Wystarczy zatem zastosować punkt (a).

9. Kwadrat

- ☐ a) można rozciąć na 6 kwadratów,
☐ b) można rozciąć na 7 kwadratów,
☐ c) można rozciąć na 2026 kwadratów.

Rozwiązanie.

Wykażemy, że kwadrat można podzielić na n kwadratów dla dowolnego $n \geq 6$. Poniższe rysunki przedstawiają podział kwadratu na 6, 7 oraz 8 kwadratów.



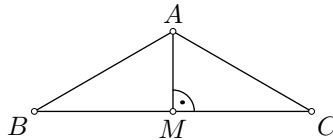
Pozostaje zauważyć, że z podziału na n kwadratów można utworzyć podział na $n + 3$ kwadraty poprzez rozcięcie jednego z kwadratów na cztery mniejsze.

10. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC . Wiadomo, że odcinek AM jest dwa razy krótszy od jednego z boków trójkąta. Wówczas

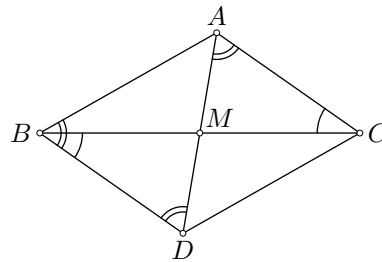
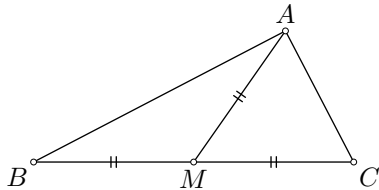
- N** a) z odcinków AB , AC i $2AM$ można zbudować trójkąt prostokątny,
- T** b) środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży na boku lub na zewnątrz trójkąta,
- T** c) jeden z kątów BAM i MAC może być równy 90° .

Rozwiązanie.

a) Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ i $AB = AC$ spełnia warunki zadania. Wtedy jednak $AB = AC = 2AM$, więc trójkąt o takich długościach boków jest równoboczny (a więc nie jest prostokątny).



b) Są dwie możliwości: odcinek AM jest dwa razy krótszy od boku BC lub od jednego z boków AB , AC . W pierwszym przypadku $AM = BM = CM$, skąd wynika, że M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .



W drugim przypadku bez straty ogólności przyjmijmy, że $AB = 2AM$. Niech D będzie odbiciem punktu A względem M . Wówczas odcinki AD i BC przecinają się w połowie, a więc czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem. Mamy $AB = 2AM = AD$, więc trójkąt ABD jest równoramienny. Mamy więc

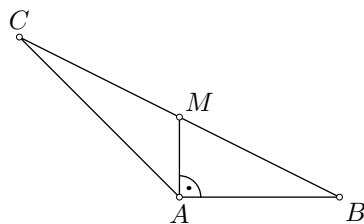
$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBA = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA.$$

W konsekwencji

$$\sphericalangle BAC > \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle BAC,$$

skąd wynika, że $\sphericalangle BAC > 90^\circ$. Trójkąt ABC jest więc rozwartokątny, czyli środek okręgu opisanego na nim leży na zewnątrz.

c) Zbudujmy trójkąt prostokątny ABM , w którym $\sphericalangle BAM = 90^\circ$ i $AB = 2AM$. Następnie zdefiniujmy punkt C jako odbicie punktu B względem M . Skonstruowaliśmy w ten sposób trójkąt ABC o żądanych własnościach.



11. Jeśli liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają $a + b + c = 1$, to

☐ T a) $a^2 + b^2 + c^2 < 1$,

☐ N b) $ab^2c^3 \leq \frac{1}{500}$,

☐ T c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 7$.

Rozwiązanie.

a) Z założeń wynika w szczególności, że $0 < a, b, c < 1$, więc $a^2 < a$, $b^2 < b$ i $c^2 < c$. Stąd $a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1$.

b) Obierzmy $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{3}$ i $c = \frac{1}{2}$. Wówczas $a + b + c = 1$ i $ab^2c^3 = \frac{1}{432} > \frac{1}{500}$.

c) Z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną wynika, że

$$\frac{1}{3} = \frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

skąd $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 > 7$.

12. Kwadrat $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $SABCD$ wpisanego w sferę α . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną Π tak, że w przekroju otrzymano czworokąt wypukły $A'B'C'D'$, przy czym punkty A', B', C', D' leżą odpowiednio na odcinkach SA, SB, SC, SD . Wówczas

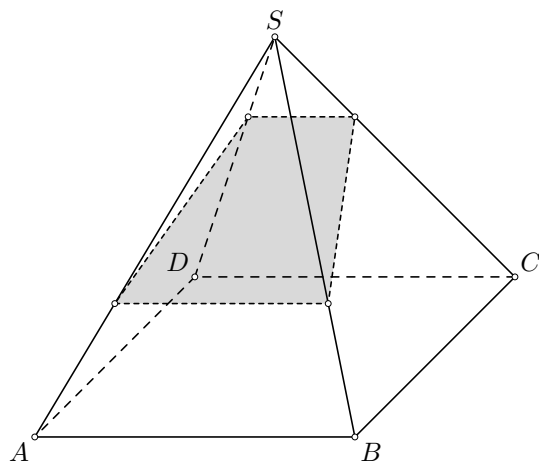
☐ N a) jeśli $A'B'C'D'$ jest trapezem, to płaszczyzna Π jest równoległa do podstawy $ABCD$,

☐ N b) pole czworokąta $A'B'C'D'$ jest nie większe od pola czworokąta $ABCD$,

☐ T c) $A'B'$ i $C'D'$ nie przecinają się lub przecinają się poza sferą α .

Rozwiązanie.

a) Wybierzmy punkty A', B', C', D' w taki sposób, by $\frac{AA'}{A'S} = \frac{BB'}{B'S} = \frac{1}{2}$ i $\frac{CC'}{C'S} = \frac{DD'}{D'S} = 2$. Wówczas $A'B' \parallel AB$ i $C'D' \parallel CD$. Podstawa $ABCD$ jest kwadratem, więc $AB \parallel CD$. Biorąc jako Π płaszczyznę wyznaczoną przez równoległe proste $A'B'$ i $C'D'$ otrzymujemy w przekroju trapez. Płaszczyzna Π nie jest równoległa do płaszczyzny $ABCD$, bo odległości punktów A' i C' od $ABCD$ różnią się (punkt A' leży dwa razy bliżej).



b) Oznaczmy długość krawędzi AB przez a , a wysokość ostrosłupa poprowadzoną z wierzchołka S przez h . W przykładzie opisanym w części a) mamy $A'B' = \frac{2}{3}a$ oraz $C'D' = \frac{1}{3}a$. Z kolei odległości punktów B' i C' od płaszczyzny $ABCD$ wynoszą odpowiednio $\frac{1}{3}h$ i $\frac{2}{3}h$.

Wysokość trapezu $A'B'C'D'$ ma, rzecz jasna, długość większą od różnicy odległości punktów C' i B' od płaszczyzny $ABCD$, czyli długość większą od $\frac{2}{3}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}h$. W konsekwencji pole trapezu $A'B'C'D'$ wynosi więcej niż $\frac{1}{2}(A'B' + C'D') \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah$. Tym samym wykazaliśmy, że jeśli $h = 6a$, to pole trapezu $A'B'C'D'$ jest większe od a^2 , czyli od pola podstawy $ABCD$.

c) Załóżmy, że proste $A'B'$ i $C'D'$ przecinają się w punkcie P . Prosta $A'B'$ jest zawarta w płaszczyźnie ABS , a prosta $C'D'$ — w płaszczyźnie CDS . Wobec tego P , czyli punkt wspólny prostych $A'B'$ i $C'D'$, leży w części wspólnej płaszczyzn ABS , CDS , czyli na prostej przechodzącej przez S równoległej do krawędzi AB i CD . Prosta ta jest styczna do sfery s . W konsekwencji punkt P leży na zewnątrz sfery s .

