LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

6 listopada 2026 r. — część otwarta

1. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 6$ oraz liczby złożone k, ℓ spełniające nierówności

$$n \leqslant k < \ell \leqslant n + \sqrt{n}.$$

Wykazać, że największe dzielniki właściwe liczb k i ℓ są różne.

Uwaga. Dzielnik właściwy liczby całkowitej to dzielnik mniejszy od niej samej.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli d jest dzielnikiem liczby całkowitej m, to $\frac{m}{d}$ również jest jej dzielnikiem. Większa z liczb d, $\frac{m}{d}$ jest równa co najmniej $\sqrt{m}$. Jeśli liczba m jest złożona, to ma dzielnik większy od 1 i mniejszy od m; z powyższej obserwacji wynika więc, że m ma dzielnik właściwy równy co najmniej $\sqrt{m}$. Tym bardziej jej największy dzielnik właściwy jest równy co najmniej $\sqrt{m}$.

Załóżmy nie wprost, że d jest największym dzielnikiem właściwym liczb k i ℓ. Wtedy d jest dzielnikiem liczby $\ell - k$ i w konsekwencji $d \leqslant \ell - k$. Z drugiej strony, $d \geqslant \sqrt{\ell}$. Otrzymujemy więc

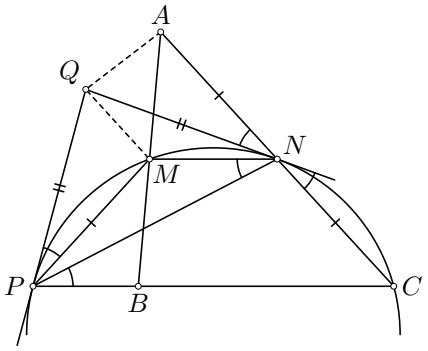
$$\sqrt{n} < \sqrt{\ell} \leqslant d \leqslant \ell - k \leqslant (n + \sqrt{n}) - n = \sqrt{n}.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że największe dzielniki właściwe liczb k i ℓ są różne.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkt N — środkiem odcinka AC. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie CMN. Okrąg ten przecina prostą BC ponownie w punkcie P różnym od C. Punkt Q wybrano tak, że proste QP i QN są styczne do Ω. Wykazać, że $AQ = QM$.

Autor zadania: Nikodem Przyłucki

Rozwiązanie: Prosta MN jest równoległa do prostej BC, gdyż M i N są środkami odcinków AB i AC. Czworokąt $PMNC$ jest więc trapezem, a skoro jest wpisany w okrąg Ω, to jest trapezem równoramiennym. Wobec tego $PM = NC = AN$.



Mamy, z twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym, $\sphericalangle MPQ = \sphericalangle MNP$ oraz $\sphericalangle ANQ = \sphericalangle CPN$. Skoro zaś $MN \parallel BC$, to $\sphericalangle MNP = \sphericalangle CPN$. Otrzymujemy zatem $\sphericalangle MPQ = \sphericalangle ANQ$.

Zauważmy wreszcie, że $QP = QN$, gdyż proste QP i QN są styczne do Ω odpowiednio w punktach P i N. Z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika więc, że trójkąty MPQ i ANQ są przystające. W szczególności $QM = QA$, co było do udowodnienia.

3. Załóżmy, że x jest niezerową liczbą rzeczywistą, dla której liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Wykazać, że dla dowolnego wielomianu W o współczynnikach całkowitych liczba $W(x) \cdot W\left(\dfrac{1}{x}\right)$ jest całkowita.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Zapiszmy $W(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ dla pewnych liczb całkowitych $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Po wymnożeniu nawiasów w wyrażeniu

$$W(x) \cdot W\left(\frac{1}{x}\right) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{x} + a_0\right)$$

i przegrupowaniu wyrazów otrzymujemy sumę wyrażeń postaci $b_k\left(x^k + \dfrac{1}{x^k}\right)$, gdzie

$$b_k = a_k a_0 + a_{k+1}a_1 + \ldots + a_{n-1}a_{n-k-1} + a_n a_{n-k}.$$

Liczby b_k są całkowite i do dokończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że liczba $A_k = x^k + \dfrac{1}{x^k}$ jest całkowita dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n$.

Liczby $A_0 = 2$ oraz $A_1 = x + \dfrac{1}{x}$ są całkowite. Ponadto dla $k \geqslant 2$

$$A_k = x^k + \frac{1}{x^k} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - \left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) = A_1 A_{k-1} - A_{k-2}.$$

Z powyższego wzoru rekurencyjnego na A_k wprost wynika, że liczby A_k są całkowite dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n$.

4. Piotrek ustawia klocki o wymiarach 1×2 na planszy o wymiarach $m \times n$. Robi to w taki sposób, że każdy klocek pokrywa dwa pola planszy, żadne dwa klocki nie pokrywają tego samego pola oraz klocki nie wystają poza planszę. Każdy klocek może być ustawiony poziomo lub pionowo.

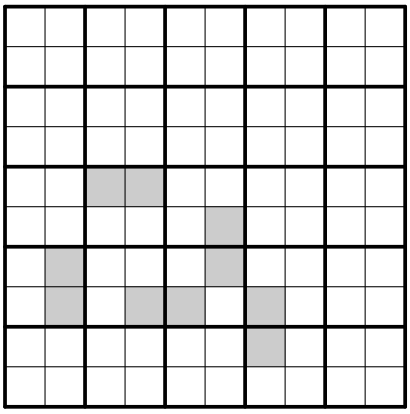
a) Załóżmy, że $m = n = 100$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę klocków, które może ustawić Piotrek, jeśli pola pokryte przez różne klocki nie mogą stykać się bokami, ale mogą stykać się rogami.

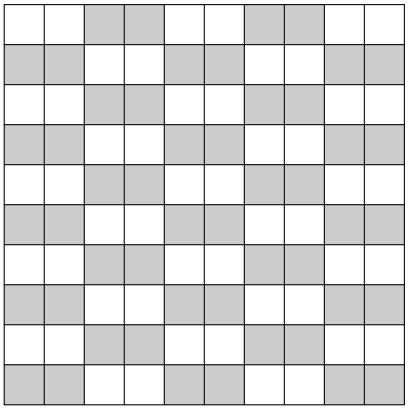
b) Załóżmy, że $m = 99$ i $n = 101$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę klocków, które może ustawić Piotrek, jeśli pola pokryte przez różne klocki nie mogą stykać się ani bokami, ani rogami.

Autor zadania: Piotr Nayar

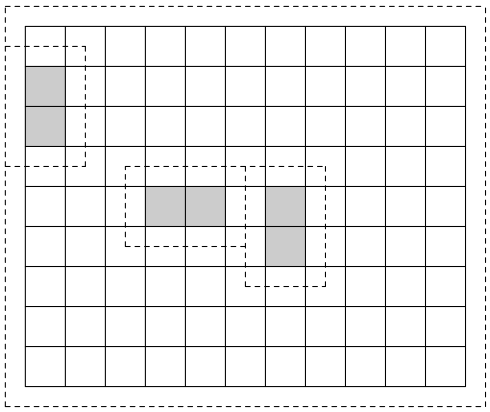
Rozwiązanie:

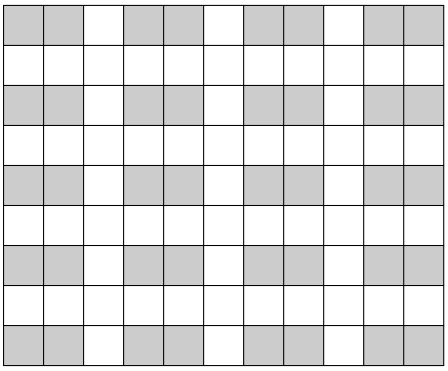
a) Planszę 100×100 dzielimy na 2500 kwadratów 2×2. Zauważmy, że w dowolnym kwadracie 2×2 klocki pokrywają co najwyżej dwa pola — gdyby pokryte zostały co najmniej trzy pola, to któreś dwa z nich byłyby pokryte przez różne klocki i stykałyby się bokiem. Wobec tego klocki mogą pokryć co najwyżej $2500 \cdot 2 = 5000$ pól. To oznacza, że na planszy można umieścić co najwyżej 2500 klocków. Sposób umieszczenia takiej liczby klocków przedstawiono poniżej na prawym rysunku.





b) Otoczmy planszę 99×101 oraz każdy klocek paskiem o szerokości $\frac{1}{2}$. Każdy klocek wraz z otoczką tworzy prostokąt 2×3, klocki oraz ich otoczki nie nachodzą na siebie i wszystkie mieszczą się w prostokącie o wymiarach 100×102. Porównując pola prostokątów dochodzimy do wniosku, że na planszy da się umieścić co najwyżej $\frac{100 \cdot 102}{2 \cdot 3} = 1700$ klocków. Sposób umieszczenia takiej liczby klocków przedstawiono poniżej na prawym rysunku (po 34 klocki w 50 wierszach).





5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz parami różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Liczbę

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$$

zapisano za pomocą ułamka nieskracalnego $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że $a^n \geqslant n^n b^{n-1}$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Sprowadzając sumę z zadania do wspólnego mianownika otrzymujemy ułamek $\frac{A}{B}$, przy czym $B = p_1p_2p_3 \dots p_n$ oraz

$$A = p_2p_3p_4 \dots p_{n-1}p_n + p_1p_3p_4 \dots p_{n-1}p_n + p_1p_2p_4 \dots p_{n-1}p_n + \dots + p_1p_2 \dots p_{n-2}p_{n-1}.$$

Powyższa suma nie dzieli się przez p_k dla żadnego k — wszystkie składniki sumy poza k-tym dzielą się przez p_k. Wobec tego ułamek $\frac{A}{B}$ jest nieskracalny i w konsekwencji $a = A$, $b = B$.

Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy

$$\frac{a}{bn} = \frac{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{p_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna tezie zadania.