



LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

część testowa — przykładowy zestaw zadań

Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy czytelnie podpisać każdą kartkę na górze strony swoim imieniem i nazwiskiem.

W każdym zadaniu należy ocenić prawdziwość trzech stwierdzeń. Jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, należy w odpowiednią kratkę wpisać literę T, a jeśli jest fałszywe, literę N.

W przypadku pomyłki literę w kratce należy przekreślić znakiem X, a właściwą odpowiedź podać obok po lewej stronie.

Za podanie trzech poprawnych odpowiedzi w zadaniu przyznaje się dwa punkty. Za podanie dwóch poprawnych odpowiedzi w zadaniu przyznaje się jeden punkt. W pozostałych przypadkach punktów nie przyznaje się. Brak odpowiedzi oraz odpowiedzi nieczytelne traktowane są jak odpowiedzi błędne.

Czas pracy: 75 minut. Powodzenia!

1. Załóżmy, że $a + b + c = 4$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ oraz $a^3 + b^3 + c^3 = 34$. Wówczas

☐

a) $ab + bc + ca > 0$,

☐

b) $abc < -7$,

☐

c) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 4$.

2. Rafał wybrał niezależnie 3 losowe liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$, przy czym za każdym razem prawdopodobieństwo wybrania każdej z dziesięciu liczb było równe $\frac{1}{10}$.

☐

a) Prawdopodobieństwo, że wszystkie wybrane liczby były parzyste wynosi $\frac{1}{8}$,

☐

b) Prawdopodobieństwo, że wśród wybranych liczb pojawiła się jedynka oraz dziesiątka jest większe niż prawdopodobieństwo, że wśród wybranych liczb pojawiły się dwie jedynki,

☐

c) Prawdopodobieństwo, że wybrane przez Rafała liczby były parami różne jest większe od $\frac{7}{10}$.

3. Waldek narysował trójkąt, w którym środek okręgu wpisanego P pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego.

☐

a) Trójkąt ten musi być prostokątny.

☐

b) Trójkąt ten musi być równoramienny.

☐

c) Ortocentrum tego trójkąta musi znajdować się w punkcie P .

4. Ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots$ spełnia warunki $a_1 = 4$ oraz $a_{n+1} = 2a_n - 3$ dla każdego $n \geq 1$. Wówczas

☐

a) $a_k = 67$ dla pewnego $k \geq 1$,

☐

b) $a_{67} \cdot a_{69} > a_{68}^2$,

☐

c) $\text{NWD}(a_{67}, a_{69}) = 1$.

5. Funkcja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ musi być stała, jeśli spełnia równanie:

☐

a) $f(x) = f(2x)$ dla dowolnej liczby $x > 0$,

☐

b) $f(x)f(y) = f(x) - f(y)$ dla dowolnych liczb $x, y > 0$,

☐

c) $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych liczb $x, y > 0$.

6. Równanie $xy + 2026 = x + y$ ma w liczbach całkowitych (x, y) :

☐

a) więcej niż 30 rozwiązań,

☐

b) rozwiązanie spełniające $xy < -5000$,

☐

c) rozwiązanie spełniające $x + y = 2$.

7. Liczba $100!$:

☐

a) ma w zapisie dziesiętnym dokładnie 24 zera na końcu,

☐

b) ma ostatnią niezerową cyfrę nieparzystą,

☐

c) jest mniejsza od 2567^{50} .

8. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość 1. Wysokość opuszczona z wierzchołka C na bok AB ma również długość 1. Wówczas

- ☐ a) obwód trójkąta ABC jest większy od $\frac{16}{5}$,
☐ b) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od $\frac{17}{5}$,
☐ c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest mniejszy od $\frac{5}{16}$.

9. Kwadrat

- ☐ a) można rozciąć na 6 kwadratów,
☐ b) można rozciąć na 7 kwadratów,
☐ c) można rozciąć na 2026 kwadratów.

10. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC . Wiadomo, że odcinek AM jest dwa razy krótszy od jednego z boków trójkąta. Wówczas

- ☐ a) z odcinków AB , AC i $2AM$ można zbudować trójkąt prostokątny,
☐ b) środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży na boku lub na zewnątrz trójkąta,
☐ c) jeden z kątów BAM i MAC może być równy 90° .

11. Jeśli liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają $a + b + c = 1$, to

- ☐ a) $a^2 + b^2 + c^2 < 1$,
☐ b) $ab^2c^3 \leq \frac{1}{500}$,
☐ c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 7$.

12. Kwadrat $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $SABCD$ wpisanego w sferę α . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną Π tak, że w przekroju otrzymano czworokąt wypukły $A'B'C'D'$, przy czym punkty A', B', C', D' leżą odpowiednio na odcinkach SA, SB, SC, SD . Wówczas

- ☐ a) jeśli $A'B'C'D'$ jest trapezem, to płaszczyzna Π jest równoległa do podstawy $ABCD$,
☐ b) pole czworokąta $A'B'C'D'$ jest nie większe od pola czworokąta $ABCD$,
☐ c) $A'B'$ i $C'D'$ nie przecinają się lub przecinają się poza sferą α .