LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
6 listopada 2026 r. — część otwarta

1. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 6$ oraz liczby złożone k, ℓ spełniające nierówności

$$n \leqslant k < \ell \leqslant n + \sqrt{n}.$$

Wykazać, że największe dzielniki właściwe liczb k i ℓ są różne.
Uwaga. Dzielnik właściwy liczby całkowitej to dzielnik mniejszy od niej samej.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkt N — środkiem odcinka AC. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie CMN. Okrąg ten przecina prostą BC ponownie w punkcie P różnym od C. Punkt Q wybrano tak, że proste QP i QN są styczne do Ω. Wykazać, że $AQ = QM$.

3. Załóżmy, że x jest niezerową liczbą rzeczywistą, dla której liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Wykazać, że dla dowolnego wielomianu W o współczynnikach całkowitych liczba $W(x) \cdot W\left(\dfrac{1}{x}\right)$ jest całkowita.

4. Piotrek ustawia klocki o wymiarach 1×2 na planszy o wymiarach $m \times n$. Robi to w taki sposób, że każdy klocek pokrywa dwa pola planszy, żadne dwa klocki nie pokrywają tego samego pola oraz klocki nie wystają poza planszę. Każdy klocek może być ustawiony poziomo lub pionowo.

a) Załóżmy, że $m = n = 100$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę klocków, które może ustawić Piotrek, jeśli pola pokryte przez różne klocki nie mogą stykać się bokami, ale mogą stykać się rogami.

b) Załóżmy, że $m = 99$ i $n = 101$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę klocków, które może ustawić Piotrek, jeśli pola pokryte przez różne klocki nie mogą stykać się ani bokami, ani rogami.

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz parami różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Liczbę

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$$

zapisano za pomocą ułamka nieskracalnego $\dfrac{a}{b}$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że $a^n \geqslant n^n b^{n-1}$.