LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

15 października 2026 r. — część testowa

1. Liczba $\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^{2026}+\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^{2026}$ jest

N	a) niewymierna,
T	b) podzielna przez 2,
N	c) podzielna przez 3.

Rozwiązanie. Mamy

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^{2026}=\sum_{k=0}^{2026}\binom{2026}{k}\left(\sqrt{6}\right)^{k}\left(\sqrt{7}\right)^{2026-k}$$

i analogicznie

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^{2026}=\sum_{k=0}^{2026}\binom{2026}{k}\left(\sqrt{6}\right)^{k}\left(-\sqrt{7}\right)^{2026-k}.$$

Składniki obu sum dla parzystych indeksów k są takie same, a dla nieparzystych k są liczbami przeciwnymi. W takim razie

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^{2026}+\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^{2026}=2\cdot\sum_{k=0}^{1013}\binom{2026}{2k}\cdot 6^{k}\cdot 7^{1013-k}$$

Jest to więc liczba całkowita dzieląca się przez 2. Każdy składnik sumy poza pierwszym jest podzielny przez 3. W takim razie rozważana liczba nie dzieli się przez 3.

2. Liczba $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+2025\cdot 2026+2026\cdot 1$ jest

N	a) większa od liczby $1^2+2^2+\ldots+2026^2$,
T	b) większa od liczby $1\cdot 2026+2\cdot 2025+\ldots+2025\cdot 2+2026\cdot 1$,
N	c) mniejsza od liczby $1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+2024\cdot 2026+2025\cdot 1+2026\cdot 2$.

Rozwiązanie. Oznaczmy

$$\begin{aligned}
A &= 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+2025\cdot 2026+2026\cdot 1,\\
B &= 1^2+2^2+\ldots+2026^2,\\
C &= 1\cdot 2026+2\cdot 2025+\ldots+2025\cdot 2+2026\cdot 1,\\
D &= 1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+2024\cdot 2026+2025\cdot 1+2026\cdot 2.
\end{aligned}$$

a) Z nierówności $ab < \frac{a^2+b^2}{2}$ dla liczb dodatnich $a \neq b$ otrzymujemy

$$A < \frac{1^2+2^2}{2} + \frac{2^2+3^2}{2} + \ldots + \frac{2025^2+2026^2}{2} + \frac{2026^2+1^2}{2} = B.$$

b) Obliczmy różnicę $A - C$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} A - C &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1 - \\ &\quad - 1 \cdot 2026 - 2 \cdot 2025 - \ldots - 2025 \cdot 2 - 2026 \cdot 1 = \\ &= 1 \cdot (2 - 2026) + 2 \cdot (3 - 2025) + 3 \cdot (4 - 2024) + \ldots + \\ &\quad + \ldots + 2025 \cdot (2026 - 2) + 2026 \cdot (1 - 1) = \\ &= 1 \cdot (-2024) + 2 \cdot (-2022) + 3 \cdot (-2020) + \ldots + 2024 \cdot 2022 + 2025 \cdot 2024. \end{aligned}$$

Parując teraz pierwszy składnik z ostatnim, drugi z przedostatnim, itd. dochodzimy do równości

$$A - C = 2024^2 + 2022^2 + \ldots + 2^2.$$

Stąd $A > C$.

c) Mamy

$$\begin{aligned} A &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 5) + \ldots + \\ &\quad + (2023 \cdot 2024 + 2024 \cdot 2025) + (2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 6^2 + \ldots + 2 \cdot 2024^2 + 2026^2 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} D &= (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + \ldots + (2025^2 - 1) + 2025 + 2 \cdot 2026 = \\ &= 2^2 + 3^2 + \ldots + 2025^2 + 4053 \end{aligned}$$

W takim razie

$$A - D = 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \ldots + 2024^2 - 2025^2 + 2026^2 - 4053.$$

Powyższa liczba jest dodatnia, bo $3^2 < 4^2$, $5^2 < 6^2$, …, $2023^2 < 2024^2$ oraz

$$2^2 + 2026^2 = 4 + 2025^2 + 2 \cdot 2025 + 1 = 2025^2 + 4055.$$

Zatem $A > D$.

Uwaga. Odpowiedzi w podpunktach a) i b) wynikają bezpośrednio z nierówności między ciągami monotonicznymi: jeśli $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ i $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, to dla dowolnej permutacji $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzą nierówności

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1 \leqslant x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \ldots + x_ny_{\sigma(n)} \leqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 6$ i $AC = 10$. Na odcinku AC wybrano punkt D tak, że $AD = 6$, a na półprostej AB wybrano punkt E tak, że $AE = 10$. Odcinki BC i DE przecinają się w punkcie P. Wówczas

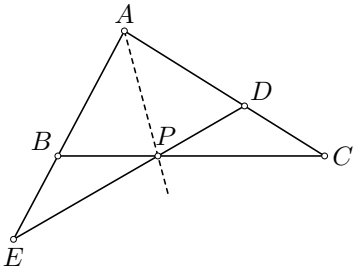
T a) półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC,

N b) stosunek pola trójkąta APB do pola trójkąta APC wynosi $\frac{9}{25}$,

T c) punkty B, D, C i E leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

a) Niech ℓ będzie dwusieczną kąta BAC. Punkty B i D są symetryczne względem ℓ. Podobnie, punkty C i E są symetryczne względem ℓ. W takim razie odcinki BC i DE przecinają prostą ℓ w tym samym punkcie. To znaczy: P leży na ℓ.



b) Pole trójkąta APB jest równe $\frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin\frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, a pole trójkąta APC jest równe $\frac{1}{2}AC \cdot AP \cdot \sin\frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Ich iloraz jest równy $\frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

c) Czworokąt $BDCE$ jest trapezem równoramiennym, jego wierzchołki leżą więc na okręgu.

4. Na przyjęciu spotkało się 101 osób. Niektóre osoby się znają. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A. Wówczas

N a) mogło zdarzyć się, że każdy zna dokładnie 13 osób,

T b) pewne dwie osoby znają tyle samo osób,

N c) jeśli każdy zna dokładnie cztery osoby, to pewne trzy osoby znają się nawzajem.

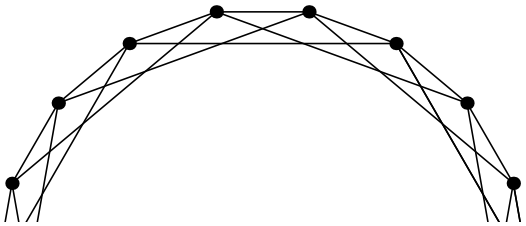
Rozwiązanie.

a) Załóżmy, że mogło się tak zdarzyć i oznaczmy liczbę znajomości, czyli par osób znających się, przez k. Wówczas $2k = 101 \cdot 13$, gdyż każda z 101 osób zna dokładnie 13 osób. Otrzymujemy sprzeczność, bo $2k$ jest liczbą parzystą, a $101 \cdot 13$ — nieparzystą.

b) Liczba znajomych danej osoby jest liczbą całkowitą pomiędzy 0 a 100. Gdyby każda z 101 osób miała inną liczbę znajomych, to każda liczba całkowita pomiędzy 0 a 100 byłaby liczbą znajomych pewnej osoby. W szczególności istniałaby osoba, która zna wszystkich, jak również istniałaby osoba, która nie nie zna nikogo. Sprzeczność.

c) Ustawmy wszystkie osoby wzdłuż okręgu w równych odstępach. Powiedzmy, że każda osoba zna się z pierwszą i trzecią osobą stojącą po jej lewej stronie oraz z

pierwszą i trzecią osobą stojącą po jej prawej stronie. Wówczas każdy ma dokładnie czterech znajomych, ale nie ma trójki osób, które znają się nawzajem.



5. Dla każdej liczby rzeczywistej c rozważamy następujący układ równań zmiennych rzeczywistych x, y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ c(x + y) = 1. \end{cases}$$

Wówczas

T a) istnieje nieskończenie wiele liczb rzeczywistych c, dla których układ równań nie ma rozwiązań,

T b) istnieje liczba rzeczywista c, dla której układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie,

N c) istnieje liczba rzeczywista c, dla której układ równań ma dokładnie trzy rozwiązania.

Rozwiązanie. Dla $c = 0$ układ równań jest sprzeczny. Dla $c \neq 0$ drugie równanie opisuje prostą o równaniu $y = -x + \frac{1}{c}$, a pierwsze równanie opisuje okrąg jednostkowy. Jeśli $|\frac{1}{c}| > \sqrt{2}$, to rzeczona prosta jest rozłączna z okręgiem jednostkowym, a jeśli $|\frac{1}{c}| = \sqrt{2}$, to jest do niego styczna. Prosta nie może przecinać okręgu w dokładnie trzech punktach.

6. Niech $N = 3^{12} + 3^9 \cdot 7^2 + 3^5 \cdot 7^4 + 7^6$. Wówczas

N a) N jest kwadratem liczby całkowitej,

T b) N ma dokładnie 64 dodatnie dzielniki,

T c) najmniejsza dodatnia liczba całkowita k, dla której kN jest kwadratem liczby całkowitej, wynosi 130.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$N = (3^4)^3 + 3 \cdot (3^4)^2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 3^4 \cdot (7^2)^2 + (7^2)^3 = (3^4 + 7^2)^3 = 130^3 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 13^3.$$

Liczba N nie jest zatem kwadratem. Jej dzielniki są postaci $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, gdzie a, b, c należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$. Dzielników tych jest zatem $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Liczba kN jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy k jest postaci $130\ell^2$. Najmniejszą taką liczbą jest 130.

7. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$, których iloczyn jest równy 1. Wówczas

N a) co najmniej sześć spośród tych liczb jest nie mniejszych od 1,

T b) można podzielić te liczby na dwie grupy, liczące odpowiednio pięć i siedem liczb, tak aby iloczyn liczb w pierwszej grupie (złożonej z pięciu liczb) był nie większy niż iloczyn liczb w drugiej grupie (złożonej z siedmiu liczb),

T c) jeżeli iloczyn każdych trzech spośród tych liczb jest nie mniejszy od 1, to wszystkie dane liczby są równe 1.

Rozwiązanie.

a) Kontrprzykład stanowią np. liczby $x_1 = x_2 = \ldots = x_{11} = \frac{1}{2}$ i $x_{12} = 2^{11}$.

b) Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{12}$. Jeśli $x_5 \leqslant 1$, to $x_1x_2x_3x_4x_5 \leqslant 1$, więc

$$x_1x_2x_3x_4x_5 \leqslant 1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12} \leqslant x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}.$$

W przeciwnym razie $x_5 > 1$ i w szczególności $x_{11} > 1$ oraz $x_{12} > 1$. Wtedy

$$x_1x_2x_3x_4x_5 \leqslant x_6x_7x_8x_9x_{10} < x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}.$$

c) Mamy $x_1x_2x_3 \geqslant 1$, $x_4x_5x_6 \geqslant 1$, $x_7x_8x_9 \geqslant 1$ i $x_{10}x_{11}x_{12} \geqslant 1$. Po wymnożeniu stronami otrzymujemy $1 \geqslant 1$, więc we wszystkich szacowaniach zachodzą równości. Analogicznie dowodzimy, że iloczyn dowolnych trzech liczb pośród $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ jest równy 1. W szczególności dla dowolnych parami różnych wskaźników i, j, k, ℓ mamy $x_ix_jx_k = x_ix_jx_\ell$, skąd $x_k = x_\ell$. W konsekwencji wszystkie liczby są równe, a skoro ich iloczyn jest równy 1, to wszystkie są równe 1.

8. Wielomian $P(x) = x^{2026} + x^{2025} + \ldots + x^2 + x + 1$

T a) nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,

N b) spełnia nierówność $P(2) > 2^{2027}$,

N c) jest funkcją rosnącą na przedziale $[-1, 1]$.

Rozwiązanie.

a) Zauważmy, że dla $x \neq 1$ mamy $P(x) = \frac{x^{2027}-1}{x-1} \neq 0$. Ponadto $P(1) = 2027$. Wielomian P nie ma więc miejsc zerowych.

b) Mamy $P(2) = \frac{2^{2027}-1}{2-1} = 2^{2027} - 1 < 2^{2027}$.

c) Mamy $P(-1) = 1$ oraz

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2027} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2^{2027}} + 1\right) < 1.$$

Funkcja P nie jest więc rosnąca na przedziale $[-1, 1]$.

9. Dany jest czworościan foremny $ABCS$. Punkty X i Y leżą odpowiednio na krawędziach AB i AS, przy czym $AX : XB = 1 : 2$ i $AY : YS = 3 : 1$. Wówczas

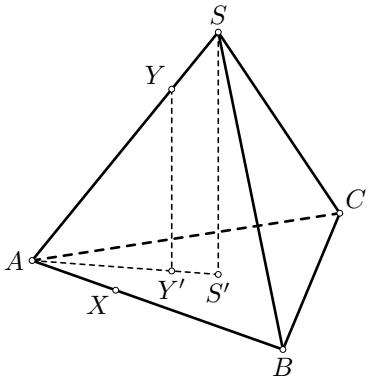
T a) płaszczyzna CXY jest prostopadła do płaszczyzny ABC,

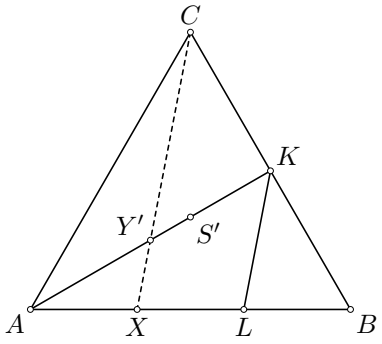
T b) objętość czworościanu $AXCY$ jest cztery razy mniejsza od objętości czworościanu $ABCS$,

N c) najdłuższym bokiem trójkąta CXY jest CX.

Rozwiązanie.

a) Niech S' i Y' oznaczają odpowiednio rzuty punktów S i Y na płaszczyznę ABC. Wystarczy wykazać, że Y' leży na prostej CX.





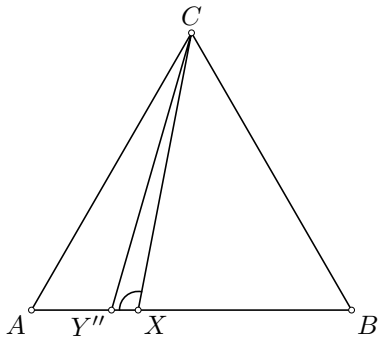
Zauważmy, że punkt S' jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a Y' dzieli odcinek AS' w stosunku $AY' : Y'S = AY : YS = 3 : 1$. Niech K będzie środkiem odcinka BC, a L — środkiem odcinka BX. Wówczas

$$\frac{AY'}{AK} = \frac{AY'}{AS'} \cdot \frac{AS'}{AK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

więc Y' jest środkiem odcinka AK. Jest ponadto jasne, że skoro $AX : XB = 1 : 2$, a L jest środkiem odcinka BX, to X jest środkiem odcinka AL. Zatem $XY' \parallel KL$, gdyż XY' jest linią środkową w trójkącie AKL, oraz $CX \parallel KL$, gdyż KL jest linią środkową w trójkącie BCX. Wykazaliśmy więc, że punkty Y' i C leżą na prostej przechodzącej przez X równoległej do KL.

b) Pole trójkąta ACX jest 3 razy mniejsze od pola trójkąta ABC, a odległość punktu Y od płaszczyzny ABC jest $\frac{4}{3}$ razy krótsza od odległości punktu S od tej płaszczyzny. W takim razie objętość czworościanu $AXCY$ jest $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ razy mniejsza od objętości czworościanu $ABCS$.

c) Obierzmy na krawędzi AB punkt Y'' dzielący ją w stosunku $BY'' : Y''A = AY : YS = 3 : 1$. Wtedy $CY = CY''$. Jest jasne, że kąt CXY'' jest rozwarty, a więc $CY'' > CX$.



10. W trójkącie równobocznym o boku 10 umieszczono 101 punktów, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wówczas

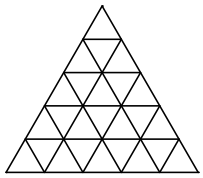
T a) pewne dwa z tych punktów są od siebie oddalone o nie więcej niż 1,

N b) pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta ostrokątnego,

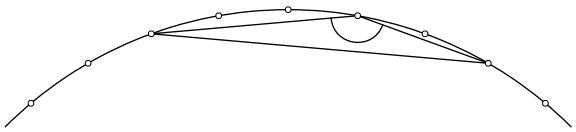
T c) pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż 1.

Rozwiązanie.

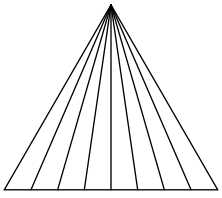
a) Podzielmy trójkąt z zadania na 100 trójkątów równobocznych o boku 1. Z zasady szufladkowej wynika, że któreś dwa z zaznaczonych punktów znajdują się w tym samym trójkącie równobocznym o boku 1. Są one oddalone o nie więcej niż 1.



b) Rozważmy ćwiartkę dowolnego okręgu zawartego wewnątrz rozważanego trójkąta i umieśćmy na niej wszystkie 101 punktów. Wówczas dowolny trójkąt, którego wierzchołkami są rozważane punkty, ma jeden z kątów o mierze co najmniej 135° — nie jest więc ostrokątny.



c) Podzielmy wyjściowy trójkąt na 50 trójkątów o polu $\frac{1}{50} \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Taki podział jest możliwy, wystarczy podzielić jeden z boków trójkąta na 50 równych części, a punkty podziału połączyć z przeciwległym wierzchołkiem. Z zasady szufladkowej wynika, że któreś trzy rozważane punkty leżą w jednym z takich trójkątów. Są one wierzchołkami trójkąta o polu mniejszym niż 1.



11. Liczba $2026^n - 1$ jest

[T] a) podzielna przez 45 dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$,

[T] b) podzielna przez $n+1$ dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n \geqslant 1$,

[T] c) podzielna przez 2027 dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie.

a) Wykorzystując wzór skróconego mnożenia

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

wnioskujemy, że liczba $2026^n - 1$ dzieli się przez $2026 - 1 = 2025 = 45^2$.

b) Przyjmijmy $n = p-1$, gdzie p jest liczbą pierwszą niedzielącą liczby 2026. Na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $2026^n - 1 = 2026^{p-1} - 1$ dzieli się przez $p = n+1$.

c) Podobnie jak w punkcie a), jeśli n jest liczbą parzystą, to $2026^n - 1$ dzieli się przez $2026^2 - 1 = 2025 \cdot 2027$.

12. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej rozważamy proces, w którego każdym kroku zastępujemy tę liczbę sumą jej cyfr w zapisie dziesiętnym. Proces kończy się w momencie uzyskania liczby jednocyfrowej. Wówczas

[N] a) proces ten dla liczby 14^{1000} zakończy się na liczbie 5,

[T] b) proces ten dla liczby $(10^9)!$ zakończy się po co najwyżej 4 krokach,

[T] c) proces ten dla liczby $\underbrace{11^{11^{11^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{11}}}}}}}_{1000}$ zakończy się na liczbie 5.

Rozwiązanie. Sumę cyfr liczby n oznaczać będziemy przez $S(n)$. Zauważmy, że $S(n) \equiv n \pmod 9$. Rzeczywiście, jeśli zapisem dziesiętnym liczby n jest $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$, to

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 = S(n) \pmod 9.$$

a) Mamy $5^6 \equiv 125^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 9$, więc

$$14^{1000} \equiv 5^{1000} \equiv (5^6)^{166} \cdot 5^4 \equiv 5^4 \equiv 625 \equiv 4 \pmod 9,$$

więc proces zakończy się na liczbie 4.

b) Mamy $(10^9)! < (10^9)^{10^9} = 10^{9 \cdot 10^9}$. Liczba $(10^9)!$ ma więc co najwyżej $9 \cdot 10^9$ cyfr, więc $S((10^9)!) \leqslant 9 \cdot 9 \cdot 10^9 < 10^{11}$. Zatem liczba $S((10^9)!)$ ma co najwyżej 11 cyfr. Stąd $S(S((10^9)!)) \leqslant 9 \cdot 11 = 99$. Wśród liczb nie większych od 99 największą sumę cyfr ma 99. Zatem $S(S(S((10^9)!))) \leqslant 18$. Wszystkie liczby nie większe od 18 mają sumę cyfr nie większą od 9. Zatem $S(S(S(S((10^9)!)))) \leqslant 9$ i rozważany proces zakończy się najpóźniej po czwartym kroku.

c) Rozważana liczba jest postaci 11^{11^n}, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Mamy

$$11^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \equiv 5 \pmod 6.$$

Zapiszmy więc $11^n = 6k + 5$. Mamy

$$11^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9,$$

więc

$$11^{11^n} \equiv 11^{6k+5} \equiv (11^6)^k \cdot 11^5 \equiv 1^k \cdot 2^5 \equiv 32 \equiv 5 \pmod 9.$$

Wniosek: proces zakończy się na liczbie 5.

Uwaga. Zamiast bezpośrednio obliczać 5^6 i 11^6 modulo 9 można było skorzystać z twierdzenia Eulera: jeśli $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$, to $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą dodatnich względnie pierwszych z n liczb niewiększych od n.