



LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

15 października 2026 r. — część testowa

1. Liczba $(\sqrt{6} + \sqrt{7})^{2026} + (\sqrt{6} - \sqrt{7})^{2026}$ jest

- ☐ N a) niewymierna,
☐ T b) podzielna przez 2,
☐ N c) podzielna przez 3.

Rozwiązanie. Mamy

$$(\sqrt{6} + \sqrt{7})^{2026} = \sum_{k=0}^{2026} \binom{2026}{k} (\sqrt{6})^k (\sqrt{7})^{2026-k}$$

i analogicznie

$$(\sqrt{6} - \sqrt{7})^{2026} = \sum_{k=0}^{2026} \binom{2026}{k} (\sqrt{6})^k (-\sqrt{7})^{2026-k}.$$

Składniki obu sum dla parzystych indeksów k są takie same, a dla nieparzystych k są liczbami przeciwnymi. W takim razie

$$(\sqrt{6} + \sqrt{7})^{2026} + (\sqrt{6} - \sqrt{7})^{2026} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{1013} \binom{2026}{2k} \cdot 6^k \cdot 7^{1013-k}$$

Jest to więc liczba całkowita dzieląca się przez 2. Każdy składnik sumy poza pierwszym jest podzielny przez 3. W takim razie rozważana liczba nie dzieli się przez 3.

2. Liczba $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1$ jest

- ☐ N a) większa od liczby $1^2 + 2^2 + \dots + 2026^2$,
☐ T b) większa od liczby $1 \cdot 2026 + 2 \cdot 2025 + \dots + 2025 \cdot 2 + 2026 \cdot 1$,
☐ N c) mniejsza od liczby $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2024 \cdot 2026 + 2025 \cdot 1 + 2026 \cdot 2$.

Rozwiązanie. Oznaczmy

$$A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1,$$

$$B = 1^2 + 2^2 + \dots + 2026^2,$$

$$C = 1 \cdot 2026 + 2 \cdot 2025 + \dots + 2025 \cdot 2 + 2026 \cdot 1,$$

$$D = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2024 \cdot 2026 + 2025 \cdot 1 + 2026 \cdot 2.$$

a) Z nierówności $ab < \frac{a^2+b^2}{2}$ dla liczb dodatnich $a \neq b$ otrzymujemy

$$A < \frac{1^2 + 2^2}{2} + \frac{2^2 + 3^2}{2} + \dots + \frac{2025^2 + 2026^2}{2} + \frac{2026^2 + 1^2}{2} = B.$$

b) Obliczmy różnicę $A - C$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} A - C &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1 - \\ &\quad - 1 \cdot 2026 - 2 \cdot 2025 - \dots - 2025 \cdot 2 - 2026 \cdot 1 = \\ &= 1 \cdot (2 - 2026) + 2 \cdot (3 - 2025) + 3 \cdot (4 - 2024) + \dots + \\ &\quad + \dots + 2025 \cdot (2026 - 2) + 2026 \cdot (1 - 1) = \\ &= 1 \cdot (-2024) + 2 \cdot (-2022) + 3 \cdot (-2020) + \dots + 2024 \cdot 2022 + 2025 \cdot 2024. \end{aligned}$$

Parując teraz pierwszy składnik z ostatnim, drugi z przedostatnim, itd. dochodzimy do równości

$$A - C = 2024^2 + 2022^2 + \dots + 2^2.$$

Stąd $A > C$.

c) Mamy

$$\begin{aligned} A &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 5) + \dots + \\ &\quad + (2023 \cdot 2024 + 2024 \cdot 2025) + (2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 6^2 + \dots + 2 \cdot 2024^2 + 2026^2 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} D &= (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + \dots + (2025^2 - 1) + 2025 + 2 \cdot 2026 = \\ &= 2^2 + 3^2 + \dots + 2025^2 + 4053 \end{aligned}$$

W takim razie

$$A - D = 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \dots + 2024^2 - 2025^2 + 2026^2 - 4053.$$

Powyższa liczba jest dodatnia, bo $3^2 < 4^2$, $5^2 < 6^2$, ..., $2023^2 < 2024^2$ oraz

$$2^2 + 2026^2 = 4 + 2025^2 + 2 \cdot 2025 + 1 = 2025^2 + 4055.$$

Zatem $A > D$.

Uwaga. Odpowiedzi w podpunktach a) i b) wynikają bezpośrednio z nierówności między ciągami monotonicznymi: jeśli $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ i $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$, to dla dowolnej permutacji $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzą nierówności

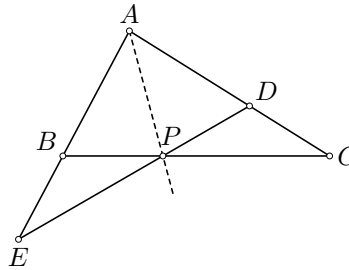
$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1 \leq x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 6$ i $AC = 10$. Na odcinku AC wybrano punkt D tak, że $AD = 6$, a na półprostej AB wybrano punkt E tak, że $AE = 10$. Odcinki BC i DE przecinają się w punkcie P . Wówczas

- ☐ T a) półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC ,
- ☐ N b) stosunek pola trójkąta APB do pola trójkąta APC wynosi $\frac{9}{25}$,
- ☐ T c) punkty B, D, C i E leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

a) Niech ℓ będzie dwusieczną kąta BAC . Punkty B i D są symetryczne względem ℓ . Podobnie, punkty C i E są symetryczne względem ℓ . W takim razie odcinki BC i DE przecinają prostą ℓ w tym samym punkcie. To znaczy: P leży na ℓ .



b) Pole trójkąta APB jest równe $\frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin \frac{1}{2}\angle BAC$, a pole trójkąta APC jest równe $\frac{1}{2}AC \cdot AP \cdot \sin \frac{1}{2}\angle BAC$. Ich iloraz jest równy $\frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

c) Czworokąt $BDCE$ jest trapezem równoramiennym, jego wierzchołki leżą więc na okręgu.

4. Na przyjęciu spotkało się 101 osób. Niektóre osoby się znają. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A . Wówczas

- ☐ N a) mogło zdarzyć się, że każdy zna dokładnie 13 osób,
- ☐ T b) pewne dwie osoby znają tyle samo osób,
- ☐ N c) jeśli każdy zna dokładnie cztery osoby, to pewne trzy osoby znają się nawzajem.

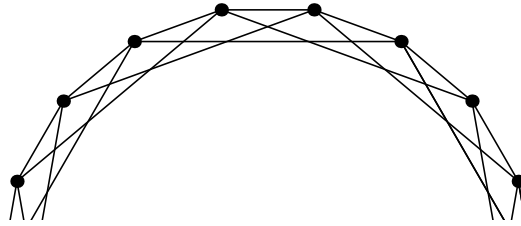
Rozwiązanie.

a) Załóżmy, że mogło się tak zdarzyć i oznaczmy liczbę znajomości, czyli par osób znających się, przez k . Wówczas $2k = 101 \cdot 13$, gdyż każda z 101 osób zna dokładnie 13 osób. Otrzymujemy sprzeczność, bo $2k$ jest liczbą parzystą, a $101 \cdot 13$ — nieparzystą.

b) Liczba znajomych danej osoby jest liczbą całkowitą pomiędzy 0 a 100. Gdyby każda z 101 osób miała inną liczbę znajomych, to każda liczba całkowita pomiędzy 0 a 100 byłaby liczbą znajomych pewnej osoby. W szczególności istniałaby osoba, która zna wszystkich, jak również istniałaby osoba, która nie zna nikogo. Sprzeczność.

c) Ustawmy wszystkie osoby wzdłuż okręgu w równych odstępach. Powiedzmy, że każda osoba zna się z pierwszą i trzecią osobą stojącą po jej lewej stronie oraz z

pierwszą i trzecią osobą stojącą po jej prawej stronie. Wówczas każdy ma dokładnie czterech znajomych, ale nie ma trójki osób, które znają się nawzajem.



5. Dla każdej liczby rzeczywistej c rozważamy następujący układ równań zmiennych rzeczywistych x, y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ c(x + y) = 1. \end{cases}$$

Wówczas

- ☐ T a) istnieje nieskończenie wiele liczb rzeczywistych c , dla których układ równań nie ma rozwiązań,
- ☐ T b) istnieje liczba rzeczywista c , dla której układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- ☐ N c) istnieje liczba rzeczywista c , dla której układ równań ma dokładnie trzy rozwiązania.

Rozwiązanie. Dla $c = 0$ układ równań jest sprzeczny. Dla $c \neq 0$ drugie równanie opisuje prostą o równaniu $y = -x + \frac{1}{c}$, a pierwsze równanie opisuje okrąg jednostkowy. Jeśli $|\frac{1}{c}| > \sqrt{2}$, to rzeczona prosta jest rozłączna z okręgiem jednostkowym, a jeśli $|\frac{1}{c}| = \sqrt{2}$, to jest do niego styczna. Prosta nie może przecinać okręgu w dokładnie trzech punktach.

6. Niech $N = 3^{12} + 3^9 \cdot 7^2 + 3^5 \cdot 7^4 + 7^6$. Wówczas

- ☐ N a) N jest kwadratem liczby całkowitej,
- ☐ T b) N ma dokładnie 64 dodatnie dzielniki,
- ☐ T c) najmniejsza dodatnia liczba całkowita k , dla której kN jest kwadratem liczby całkowitej, wynosi 130.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$N = (3^4)^3 + 3 \cdot (3^4)^2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 3^4 \cdot (7^2)^2 + (7^2)^3 = (3^4 + 7^2)^3 = 130^3 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 13^3.$$

Liczba N nie jest zatem kwadratem. Jej dzielniki są postaci $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, gdzie a, b, c należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$. Dzielników tych jest zatem $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Liczba kN jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy k jest postaci $130\ell^2$. Najmniejszą taką liczbą jest 130.

7. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, których iloczyn jest równy 1. Wówczas

- N a) co najmniej sześć spośród tych liczb jest nie mniejszych od 1,
- T b) można podzielić te liczby na dwie grupy, liczące odpowiednio pięć i siedem liczb, tak aby iloczyn liczb w pierwszej grupie (złożonej z pięciu liczb) był nie większy niż iloczyn liczb w drugiej grupie (złożonej z siedmiu liczb),
- T c) jeżeli iloczyn każdych trzech spośród tych liczb jest nie mniejszy od 1, to wszystkie dane liczby są równe 1.

Rozwiązanie.

- a) Kontrprzykład stanowią np. liczby $x_1 = x_2 = \dots = x_{11} = \frac{1}{2}$ i $x_{12} = 2^{11}$.
- b) Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{12}$. Jeśli $x_5 \leq 1$, to $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1$, więc

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq 1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} \leq x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}.$$

W przeciwnym razie $x_5 > 1$ i w szczególności $x_{11} > 1$. Wtedy

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} < x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}.$$

c) Mamy $x_1 x_2 x_3 \leq 1$, $x_4 x_5 x_6 \leq 1$, $x_7 x_8 x_9 \leq 1$ i $x_{10} x_{11} x_{12} \leq 1$. Po wymnożeniu stronami otrzymujemy $1 \leq 1$, więc we wszystkich szacowaniach zachodzą równości. Analogicznie dowodzimy, że iloczyn dowolnych trzech liczb spośród $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ jest równy 1. W szczególności dla dowolnych parami różnych wskaźników i, j, k, ℓ mamy $x_i x_j x_k = x_i x_j x_\ell$, skąd $x_k = x_\ell$. W konsekwencji wszystkie liczby są równe, a skoro ich iloczyn jest równy 1, to wszystkie są równe 1.

8. Wielomian $P(x) = x^{2026} + x^{2025} + \dots + x^2 + x + 1$

- T a) nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,
- N b) spełnia nierówność $P(2) > 2^{2027}$,
- N c) jest funkcją rosnącą na przedziale $[-1, 1]$.

Rozwiązanie.

a) Zauważmy, że dla $x \neq 1$ mamy $P(x) = \frac{x^{2027}-1}{x-1} \neq 0$. Ponadto $P(1) = 2027$. Wielomian P nie ma więc miejsc zerowych.

b) Mamy $P(2) = \frac{2^{2027}-1}{2-1} = 2^{2027} - 1 < 2^{2027}$.

c) Mamy $P(-1) = 1$ oraz

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2027} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2^{2027}} + 1\right) < 1.$$

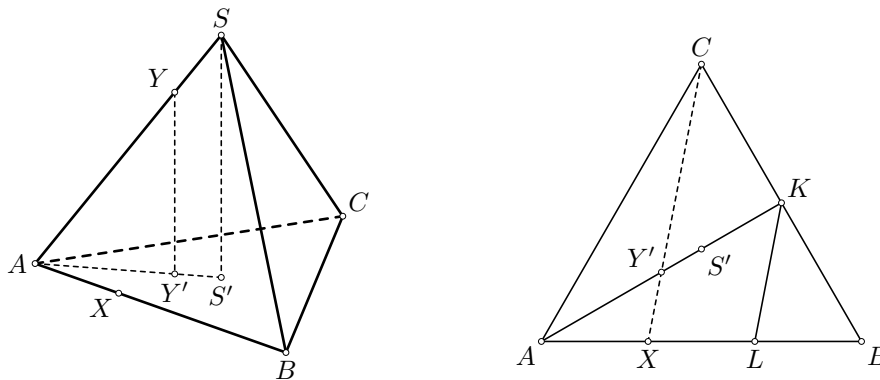
Funkcja P nie jest więc rosnąca na przedziale $[-1, 1]$.

9. Dany jest czworościan foremny $ABCS$. Punkty X i Y leżą odpowiednio na krawędziach AB i AS , przy czym $AX : XB = 1 : 2$ i $AY : YS = 3 : 1$. Wówczas

- T** a) płaszczyzna CXY jest prostopadła do płaszczyzny ABC ,
- T** b) objętość czworościanu $AXCY$ jest cztery razy mniejsza od objętości czworościanu $ABCS$,
- N** c) najdłuższym bokiem trójkąta CXY jest CX .

Rozwiązanie.

a) Niech S' i Y' oznaczają odpowiednio rzuty punktów S i Y na płaszczyznę ABC . Wystarczy wykazać, że Y' leży na prostej CX .



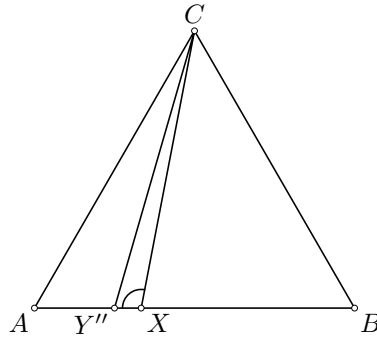
Zauważmy, że punkt S' jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , a Y' dzieli odcinek AS' w stosunku $AY' : Y'S = AY : YS = 3 : 1$. Niech K będzie środkiem odcinka BC , a L — środkiem odcinka BX . Wówczas

$$\frac{AY'}{AK} = \frac{AY'}{AS'} \cdot \frac{AS'}{AK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

więc Y' jest środkiem odcinka AK . Jest ponadto jasne, że skoro $AX : XB = 1 : 2$, a L jest środkiem odcinka BX , to X jest środkiem odcinka AL . Zatem $XY' \parallel KL$, gdyż XY' jest linią środkową w trójkącie AKL , oraz $CX \parallel KL$, gdyż KL jest linią środkową w trójkącie BCX . Wykazaliśmy więc, że punkty Y' i C leżą na prostej przechodzącej przez X równoległej do KL .

b) Pole trójkąta ACX jest 3 razy mniejsze od pola trójkąta ABC , a odległość punktu Y od płaszczyzny ABC jest $\frac{4}{3}$ razy krótsza od odległości punktu S od tej płaszczyzny. W takim razie objętość czworościanu $AXCY$ jest $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ razy mniejsza od objętości czworościanu $ABCS$.

c) Obierzmy na krawędzi AB punkt Y'' dzielący ją w stosunku $BY'' : Y''A = AY : YS = 3 : 1$. Wtedy $CY = CY''$. Jest jasne, że kąt CXY'' jest rozwarty, a więc $CY'' > CX$.

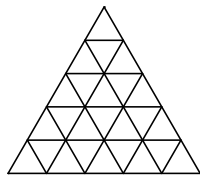


10. W trójkącie równobocznym o boku 10 umieszczono 101 punktów, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wówczas

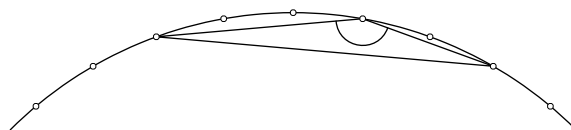
- T a) pewne dwa z tych punktów są od siebie oddalone o nie więcej niż 1,
N b) pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta ostrokątnego,
T c) pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż 1.

Rozwiązanie.

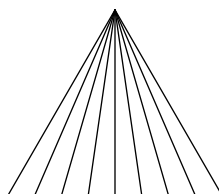
a) Podzielmy trójkąt z zadania na 100 trójkątów równobocznych o boku 1. Z zasady szufladkowej wynika, że któreś dwa z zaznaczonych punktów znajdują się w tym samym trójkącie równobocznym o boku 1. Są one oddalone o nie więcej niż 1.



b) Rozważmy ćwiartkę dowolnego okręgu zawartego wewnątrz rozważanego trójkąta i umieśćmy na niej wszystkie 101 punktów. Wówczas dowolny trójkąt, którego wierzchołkami są rozważane punkty, ma jeden z kątów o mierze co najmniej 135° — nie jest więc ostrokątny.



c) Podzielmy wyjściowy trójkąt na 50 trójkątów o polu $\frac{1}{50} \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Takie podział jest możliwy, wystarczy podzielić jeden z boków trójkąta na 50 równych części, a punkty podziału połączyć z przeciwległym wierzchołkiem. Z zasady szufladkowej wynika, że któreś trzy rozważane punkty leżą w jednym z takich trójkątów. Są one wierzchołkami trójkąta o polu mniejszym niż 1.



11. Liczba $2026^n - 1$ jest

- ☐ a) podzielna przez 45 dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$,
- ☐ b) podzielna przez $n + 1$ dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n \geq 1$,
- ☐ c) podzielna przez 2027 dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n \geq 1$.

Rozwiązanie.

a) Wykorzystując wzór skróconego mnożenia

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

wnioskujemy, że liczba $2026^n - 1$ dzieli się przez $2026 - 1 = 2025 = 45^2$.

b) Przyjmijmy $n = p - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą nie dzielącą liczby 2026. Na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $2026^n - 1 = 2026^{p-1} - 1$ dzieli się przez $p = n + 1$.

c) Podobnie jak w punkcie a), jeśli n jest liczbą parzystą, to $2026^n - 1$ dzieli się przez $2026^2 - 1 = 2025 \cdot 2027$.

12. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej rozważamy proces, w którego każdym kroku zastępujemy tę liczbę sumą jej cyfr w zapisie dziesiętnym. Proces kończy się w momencie uzyskania liczby jednocyfrowej. Wówczas

- ☐ a) proces ten dla liczby 14^{1000} zakończy się na liczbie 5,
- ☐ b) proces ten dla liczby $(10^9)!$ zakończy się po co najwyżej 4 krokach,
- ☐ c) proces ten dla liczby $\underbrace{11^{11^{11 \dots^{11}}}}_{1000}$ zakończy się na liczbie 5.

Rozwiązanie. Sumę cyfr liczby n oznaczajmy przez $S(n)$. Zauważmy, że $S(n) \equiv n \pmod{9}$. Rzeczywiście, jeśli zapisem dziesiętnym liczby n jest $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, to

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 = S(n) \pmod{9}.$$

a) Mamy $5^6 \equiv 125^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{9}$, więc

$$14^{1000} \equiv 5^{1000} \equiv (5^6)^{166} \cdot 5^4 \equiv 5^4 \equiv 625 \equiv 4 \pmod{9},$$

więc proces zakończy się na liczbie 4.

b) Mamy $(10^9)! < (10^9)^{10^9} = 10^{9 \cdot 10^9}$. Liczba $(10^9)!$ ma więc co najwyżej $9 \cdot 10^9$ cyfr, więc $S((10^9)!) \leq 9 \cdot 9 \cdot 10^9 < 10^{11}$. Zatem liczba $S((10^9)!)$ ma co najwyżej 11 cyfr. Stąd $S(S((10^9)!)) \leq 9 \cdot 11 = 99$. Wśród liczb nie większych od 99 największą sumę cyfr ma 99. Zatem $S(S(S((10^9)!))) \leq 18$. Wszystkie liczby nie większe od 18 mają sumę cyfr nie większą od 9. Zatem $S(S(S(S((10^9)!)))) \leq 9$ i rozważany proces zakończy się najpóźniej po czwartym kroku.

c) Rozważana liczba jest postaci 11^{11^n} , gdzie n jest liczbą nieparzystą. Mamy

$$11^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \equiv 5 \pmod{6}.$$

Zapiszmy więc $11^n = 6k + 5$. Mamy

$$11^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{9},$$

więc

$$11^{11^n} \equiv 11^{6k+5} \equiv (11^6)^k \cdot 11^5 \equiv 1^k \cdot 2^5 \equiv 32 \equiv 5 \pmod{9}.$$

Wniosek: proces zakończy się na liczbie 5.

Uwaga. Zamiast bezpośrednio obliczać 5^6 i 11^6 modulo 9 można było skorzystać z twierdzenia Eulera: jeśli $\text{NWD}(a, n) = 1$, to $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą dodatnich względnie pierwszych z n liczb niewiększych od n .