



LXXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

15 października 2026 r. — część testowa

Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy czytelnie podpisać każdą kartkę na górze strony swoim imieniem i nazwiskiem.

W każdym zadaniu należy ocenić prawdziwość trzech stwierdzeń. Jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, należy w odpowiednią kratkę wpisać literę T, a jeśli jest fałszywe, literę N.

W przypadku pomyłki literę w kratce należy przekreślić znakiem X, a właściwą odpowiedź podać obok po lewej stronie.

Za podanie trzech poprawnych odpowiedzi w zadaniu przyznaje się dwa punkty. Za podanie dwóch poprawnych odpowiedzi w zadaniu przyznaje się jeden punkt. W pozostałych przypadkach punktów nie przyznaje się. Brak odpowiedzi oraz odpowiedzi nieczytelne traktowane są jak odpowiedzi błędne.

Czas pracy: 75 minut. Powodzenia!

1. Liczba $(\sqrt{6} + \sqrt{7})^{2026} + (\sqrt{6} - \sqrt{7})^{2026}$ jest

☐

a) niewymierna,

☐

b) podzielna przez 2,

☐

c) podzielna przez 3.

2. Liczba $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2025 \cdot 2026 + 2026 \cdot 1$ jest

☐

a) większa od liczby $1^2 + 2^2 + \dots + 2026^2$,

☐

b) większa od liczby $1 \cdot 2026 + 2 \cdot 2025 + \dots + 2025 \cdot 2 + 2026 \cdot 1$,

☐

c) mniejsza od liczby $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2024 \cdot 2026 + 2025 \cdot 1 + 2026 \cdot 2$.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 6$ i $AC = 10$. Na odcinku AC wybrano punkt D tak, że $AD = 6$, a na półprostej AB wybrano punkt E tak, że $AE = 10$. Odcinki BC i DE przecinają się w punkcie P . Wówczas

☐

a) półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC ,

☐

b) stosunek pola trójkąta APB do pola trójkąta APC wynosi $\frac{9}{25}$,

☐

c) punkty B , D , C i E leżą na jednym okręgu.

4. Na przyjęciu spotkało się 101 osób. Niektóre osoby się znają. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A . Wówczas

- ☐ a) mogło zdarzyć się, że każdy zna dokładnie 13 osób,
- ☐ b) pewne dwie osoby znają tyle samo osób,
- ☐ c) jeśli każdy zna dokładnie cztery osoby, to pewne trzy osoby znają się nawzajem.

5. Dla każdej liczby rzeczywistej c rozważamy następujący układ równań zmiennej rzeczywistej x, y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ c(x + y) = 1. \end{cases}$$

Wówczas

- ☐ a) istnieje nieskończenie wiele liczb rzeczywistych c , dla których układ równań nie ma rozwiązań,
- ☐ b) istnieje liczba rzeczywista c , dla której układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- ☐ c) istnieje liczba rzeczywista c , dla której układ równań ma dokładnie trzy rozwiązania.

6. Niech $N = 3^{12} + 3^9 \cdot 7^2 + 3^5 \cdot 7^4 + 7^6$. Wówczas

- ☐ a) N jest kwadratem liczby całkowitej,
- ☐ b) N ma dokładnie 64 dodatnie dzielniki,
- ☐ c) najmniejsza dodatnia liczba całkowita k , dla której kN jest kwadratem liczby całkowitej, wynosi 130.

7. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, których iloczyn jest równy 1. Wówczas

- ☐ a) co najmniej sześć spośród tych liczb jest nie mniejszych od 1,
- ☐ b) można podzielić te liczby na dwie grupy, liczące odpowiednio pięć i siedem liczb, tak aby iloczyn liczb w pierwszej grupie (złożonej z pięciu liczb) był nie większy niż iloczyn liczb w drugiej grupie (złożonej z siedmiu liczb),
- ☐ c) jeżeli iloczyn każdych trzech spośród tych liczb jest nie mniejszy od 1, to wszystkie dane liczby są równe 1.

8. Wielomian $P(x) = x^{2026} + x^{2025} + \dots + x^2 + x + 1$

- ☐ a) nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,
- ☐ b) spełnia nierówność $P(2) > 2^{2027}$,
- ☐ c) jest funkcją rosnącą na przedziale $[-1, 1]$.

9. Dany jest czworościan foremny $ABCS$. Punkty X i Y leżą odpowiednio na krawędziach AB i AS , przy czym $AX : XB = 1 : 2$ i $AY : YS = 3 : 1$. Wówczas

- ☐ a) płaszczyzna CXY jest prostopadła do płaszczyzny ABC ,
- ☐ b) objętość czworościanu $AXCY$ jest cztery razy mniejsza od objętości czworościanu $ABCS$,
- ☐ c) najdłuższym bokiem trójkąta CXY jest CX .

10. W trójkącie równobocznym o boku 10 umieszczono 101 punktów, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wówczas

- ☐ a) pewne dwa z tych punktów są od siebie oddalone o nie więcej niż 1,
- ☐ b) pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta ostrokątnego,
- ☐ c) pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż 1.

11. Liczba $2026^n - 1$ jest

- ☐ a) podzielna przez 45 dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$,
- ☐ b) podzielna przez $n + 1$ dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n \geq 1$,
- ☐ c) podzielna przez 2027 dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n \geq 1$.

12. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej rozważamy proces, w którego każdym kroku zastępujemy tę liczbę sumą jej cyfr w zapisie dziesiętnym. Proces kończy się w momencie uzyskania liczby jednocyfrowej. Wówczas

- ☐ a) proces ten dla liczby 14^{1000} zakończy się na liczbie 5,
- ☐ b) proces ten dla liczby $(10^9)!$ zakończy się po co najwyżej 4 krokach,
- ☐ c) proces ten dla liczby $\underbrace{11^{11^{11^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{11}}}}}}}_{1000}$ zakończy się na liczbie 5.