# LXXVII Olimpiada Matematyczna

**Rozwiązania zadań konkursowych**
**zawodów stopnia trzeciego**

**1**. Dane są dodatnie liczby całkowite $a$, $b$, $n$ spełniające warunek $2a = bn$. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 2a\}$ podzielono na $n$ parami rozłącznych zbiorów mocy $b$. Wykazać, że te $n$ zbiorów można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, by zbiory w pierwszej grupie zawierały łącznie co najmniej $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$ elementów niewiększych od $a$, a zbiory w drugiej grupie zawierały łącznie co najmniej $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$ elementów większych od $a$.

*Autor zadania: Dominik Burek*

*Rozwiązanie:* Oznaczmy $b$-elementowe zbiory dane w treści zadania przez $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ niech $x_i$ będzie liczbą elementów zbioru $X_i$ niewiększych od $a$ oraz niech $y_i = b - x_i$, tj. niech $y_i$ będzie liczbą elementów zbioru $X_i$ większych od $a$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania można założyć, że $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Wówczas $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i = a = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Jeśli $n = 2m$, gdzie $m$ jest liczbą całkowitą, to pierwszą grupę tworzymy ze zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_m$, a drugą ze zbiorów $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_{2m}$. Łączna liczba elementów niewiększych od $a$ w pierwszej grupie jest równa $\sum_{i=1}^{m} x_i$. Skoro $x_i \geqslant x_j$ dla $i \leqslant m < j$, to

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2m} x_i = \frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{b}{4}.$$

Analogicznie, w drugiej grupie łączna liczba elementów większych od $a$ wynosi

$$\sum_{i=m+1}^{2m} y_i \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2m} y_i = \frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{b}{4}.$$

Pozostał przypadek, gdy $n = 2m + 1$, gdzie $m$ jest liczbą całkowitą. Jeśli $x_{m+1} \geqslant \frac{b}{2}$, to $y_{m+1} \leqslant \frac{b}{2}$. Wtedy pierwszą grupę tworzymy ze zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$, a drugą grupę ze zbiorów $X_{m+2}, \ldots, X_{2m+1}$. Wówczas w pierwszej grupie jest łącznie

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_i \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2m+1} x_i = \frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{b}{4}$$

elementów niewiększych od $a$. W drugiej grupie jest dokładnie $\sum_{i=m+2}^{n} y_i$ liczb większych od $a$. Wykażemy, że jest to liczba niemniejsza od $\frac{a}{2} - \frac{b}{4}$. Rzeczywiście, mamy

$$a = \sum_{1=1}^{2m+1} y_i = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right) + y_{m+1} + \left(\sum_{i=m+2}^{2m+1} y_i\right) \leqslant 2 \cdot \left(\sum_{i=m+2}^{2m+1} y_i\right) + y_{m+1} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \left(\sum_{i=m+2}^{2m+1} y_i\right) + \frac{b}{2},$$

co daje żądane szacowanie.

W przypadku, gdy $x_{m+1} < \frac{b}{2}$ postępujemy analogicznie: pierwszą grupę tworzymy ze zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_m$, a drugą ze zbiorów $X_{m+1}, \ldots, X_{2m+1}$. Analogicznie jak poprzednio, druga grupa zawiera

$$\sum_{i=m+1}^{2m+1} x_i \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2m+1} x_i = \frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{b}{4}.$$

Pierwsza grupa zawiera $\sum_{i=1}^{m} x_i$ liczb niewiększych od $a$ i jest to liczba niemniejsza od $\frac{a}{2} - \frac{b}{4}$, gdyż

$$a = \sum_{i=1}^{2m+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + x_{m+1} + \left(\sum_{i=m+2}^{2m+1} x_i\right) \leqslant 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + x_{m+1} <$$
$$< 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \frac{b}{2}.$$

**2**. Dane są dodatnie liczby całkowite $a$ i $b$. Wykazać, że liczba $b-1$ dzieli się przez $a$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$ niewiększej od $\frac{b}{2}$ spełniona jest równość

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \cdot n \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \right\rfloor.$$

*Uwaga.* Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą od $x$.

*Autor zadania: Dominik Burek*

*Rozwiązanie:* Dla $b=1$ liczba $a$ zawsze dzieli $b-1=0$, a równość z zadania jest spełniona dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$ niewiększej od $\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$, bowiem takie liczby $n$ w ogóle nie istnieją. Od teraz zakładamy, że $b \geqslant 2$.

Równość z treści zadania oznacza, że istnieje liczba całkowita $m$ spełniająca nierówności

$$m \leqslant \frac{a}{b} \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) < \frac{a}{b} \cdot n < m+1.$$

Warunek ten jest równoważny temu, że

$$m \cdot b + \frac{a}{2} \leqslant an < (m+1) \cdot b. \tag{$\star$}$$

Powyższa nierówność, niezależnie od $n$, daje $mb + \frac{a}{2} < (m+1)b$, skąd $\frac{a}{2} < b$. Jeśli więc $a \geqslant 2b$, to równość z zadania nie jest spełniona np. dla $n=1$ (co jest liczbą niewiększą od $\frac{b}{2}$). Podzielność $a \mid b-1$ nie może być wtedy spełniona, bo $a \geqslant 2b > b-1 > 0$. Od teraz zakładamy, że $a < 2b$. Nierówność $(\star)$ oznacza wtedy, że $r(an) \geqslant \frac{a}{2}$, gdzie $r(x)$ oznacza resztę z dzielenia przez $b$ liczby całkowitej $x$.

Załóżmy, że $a \mid b-1$, tj. $b = ac+1$ dla pewnego $c$ całkowitego. Rozważmy dowolną liczbę całkowitą $n$ spełniającą nierówności $1 \leqslant n \leqslant \frac{b}{2} = \frac{ac+1}{2}$. Podzielmy $n$ przez $c$ z resztą: $n = dc+e$. Wtedy $0 \leqslant d \leqslant \frac{a}{2}$ i $0 \leqslant e \leqslant c-1$, przy czym równość $d = \frac{a}{2}$ jest możliwa wyłącznie, gdy $2 \mid a$ i $e=0$. Jeśli $e=0$, to $d \geqslant 1$ i $an = adc = (d-1)b + (b-d)$. Mamy $b > b-d \geqslant \frac{a}{2}$, więc $r(an) = b-d \geqslant \frac{a}{2}$. Jeśli $e \geqslant 1$, to $an = adc+ae = db+ae-d$. Mamy wówczas $\frac{a}{2} \leqslant a-d \leqslant ae-d < ac+1 = b$, skąd wynika, że $r(an) = ae-d \geqslant \frac{a}{2}$.

Teraz załóżmy, że $a \nmid b-1$. Należy wskazać dodatnią liczbę $n \leqslant \frac{b}{2}$, dla której $r(an) < \frac{a}{2}$. Jest jasne, że $a \geqslant 2$ (bo $1 \mid b-1$). Zapiszmy $b = ac+s$ gdzie $s \neq 1$ jest resztą z dzielenia $b$ przez $a$. Mamy dwa przypadki:

**1° $\mathbf{s=0}$**. Przyjmijmy $n=c$. Wtedy $an = ac = b$, więc $r(an)=0$. Taki wybór $n$ jest możliwy, bo $c>0$ i $c \leqslant \frac{ac}{2} = \frac{b}{2}$.

**2° $\mathbf{s \geqslant 2}$**. Niech $k$ będzie taką liczbą całkowitą, że $ks > \frac{a}{2} \geqslant (k-1)s$. Mamy wówczas $a \geqslant ks$ (dla $k=1$ wynika to stąd, że $s<a$, a dla $k \geqslant 2$ stąd, że $a \geqslant 2(k-1)s \geqslant ks$). Połóżmy $n = kc+1$. Wtedy

$$an = akc + a = k(b-s) + a = kb + a - ks.$$

Mamy $0 \leqslant a-ks < \frac{a}{2} < b$, a więc $r(an) = a-ks < \frac{a}{2}$. Podstawienie $n = kc+1$ jest dozwolone: nierówność $n \leqslant \frac{b}{2}$ jest równoważna nierówności

$ac+s \geqslant 2kc+2$. Jest ona prawdziwa, bo z nierówności $a \geqslant ks$ i $s \geqslant 2$ wynika, że $ac+s \geqslant ksc+s \geqslant 2kc+2$.

**3**. Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ oraz dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniających równość $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$ zachodzi nierówność

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant \sqrt{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^2 .$$

*Autor zadania: Adam Karczmarz*

*Rozwiązanie:*
*Sposób 1.* Mamy oczywiście $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^n x_i^4$. Ponadto z nierówności Cauchy'ego Schwarza wynika, że

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)^2$$

oraz

$$n\sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 1.$$

Wobec tego

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^4} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{3/2} \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 .$$

*Sposób 2.* Niech $M$ będzie największą z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mamy wówczas $\sum_{i=1}^n x_i^3 \leqslant M\sum_{i=1}^n x_i^2$. By zakończyć rozwiązanie wystarczy wykazać, że $M\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2$.

Jeśli $M \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, to

$$M\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Wykorzystując udowodnioną w sposobie pierwszym nierówność $1 \leqslant n\sum_{i=1}^n x_i^2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 .$$

Jeśli zaś $M > \frac{1}{\sqrt{n}}$, to

$$M\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{M}\cdot M^2\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 < \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2.$$

*Sposób 3.* Oznaczmy lewą i prawą stronę dowodzonej nierówności odpowiednio przez $L$ i $P$. Wówczas

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^4 + x_j^4)$. Wykorzystując tę równość zapisujemy $P$ w postaci

$$\begin{aligned} P =&\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 2\sqrt{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i^2 x_j^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + (\sqrt{n}-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 2\sqrt{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i^2 x_j^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}(x_i^4 + x_j^4) + 2\sqrt{n}x_i^2 x_j^2\right). \end{aligned}$$

Wystarczy udowodnić, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$ab(a^2+b^2) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+1}(a^4+b^4) + 2\sqrt{n}a^2b^2,$$

bo kładąc $a = x_i$, $b = x_j$ i sumując po wszystkich wskaźnikach $1 \leqslant i < j \leqslant n$ dostaniemy $L \leqslant P$.

Wykorzystując nierówności $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ oraz $\sqrt{2(x^4+y^4)} \geqslant x^2 + y^2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1}(a^4+b^4)+2\sqrt{n}a^2b^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}(a^4+b^4)a^2b^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}}(a^2+b^2)ab$$

i do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}} = 2\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1.$$

*Uwaga.* Taką metodą można wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{\sqrt{n}+1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2.$$

*Sposób 4.* Wykażemy przez indukcję względem $n$, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2.$$

Dla $n = 1$ mamy równość. W kroku indukcyjnym bez straty ogólności załóżmy, że $x_{n+1}$ jest największą z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Założenie indukcyjne daje

$$\sqrt{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 > \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \qquad (\spadesuit)$$

Do wykazania zostaje

$$\sqrt{n+1}\left(x_{n+1}^4 + 2x_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \geqslant x_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 + x_{n+1}^3\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad (\heartsuit)$$

bo sumując $(\spadesuit)$ z $(\heartsuit)$ dostajemy tezę indukcyjną. Zauważmy, że

$$x_{n+1}^4 + 2x_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > x_{n+1}^4 + x_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant x_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3. \qquad (\clubsuit)$$

Do wykazania zostaje

$$\left(\sqrt{n+1}-1\right)\left(x_{n+1}^4 + 2x_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \geqslant x_{n+1}^3\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad (\diamondsuit)$$

bo $(\clubsuit) + (\diamondsuit) = (\heartsuit)$. Z nierówności między średnimi otrzymujemy

$$x_{n+1}^4 + 2x_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 2x_{n+1}^3\sqrt{2\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \geqslant 2\sqrt{2}x_{n+1}^3\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sqrt{n}}.$$

Do wykazania zostaje

$$\left(\sqrt{n+1}-1\right) 2\sqrt{\frac{2}{n}} \geqslant 1.$$

Równoważnie:

$$\begin{aligned} \frac{8\left(\sqrt{n+1}-1\right)^2}{n} &\geqslant 1 \\ 8\left(n+2-2\sqrt{n+1}\right) &\geqslant n \\ 7n+16 &\geqslant 16\sqrt{n+1} \\ 49n^2+224n+256 &\geqslant 256n+256 \\ 49n^2 &\geqslant 32n, \end{aligned}$$

co jest oczywiście spełnione dla $n \geqslant 1$. Dowód zakończony.
*Uwaga.* Taką metodą można udowodnić, że

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^3\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \leqslant \left(\sqrt{\frac{n-1}{8}}+1\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^2.$$

**4**. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek $f(x) = f(\frac{1}{x})$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Załóżmy, że istnieją wielomiany $P$, $Q$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające równość $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Wykazać, że istnieją wielomiany $R$, $S$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające równość $f(x) = \frac{R\left(x+\frac{1}{x}\right)}{S\left(x+\frac{1}{x}\right)}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

*Autor zadania: Piotr Nayar*

*Rozwiązanie:* Z założeń zadania wynika, że wielomian $Q$ nie ma miejsc zerowych, a więc ma stały znak. Zauważmy, że dla dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej $x$

$$f(x)Q(x) = P(x) \quad \text{oraz} \quad f\left(\frac{1}{x}\right)Q\left(\frac{1}{x}\right) = P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Po dodaniu stronami i skorzystaniu z równości $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ otrzymujemy

$$f(x)\left(Q(x)+Q\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f(x)Q(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)Q\left(\frac{1}{x}\right) = P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Liczba $Q(x)+Q(\frac{1}{x})$ jest niezerowa. Wobec tego $f(x)=\frac{P(x)+P\left(\frac{1}{x}\right)}{Q(x)+Q\left(\frac{1}{x}\right)}$ dla dowolnego $x\neq 0$. Do zakończenia rozwiązania pozostaje wykazać lemat: jeśli $W$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to istnieje wielomian $V$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $V(x+\frac{1}{x})=W(x)+W(\frac{1}{x})$ dla dowolnego $x\neq 0$. Stosując bowiem lemat do wielomianów $P$ i $Q$ otrzymujemy szukane wielomiany $R$ i $S$.

*Dowód lematu.* Zdefiniujmy ciąg wielomianów $V_0$, $V_1$, ... rekurencyjnie za pomocą wzorów $V_0(x)=2$, $V_1(x)=x$ oraz $V_{i+1}(x)=xV_i(x)-V_{i-1}(x)$ dla $i\geqslant 1$. Wykażemy przez indukcję, że $x^i+\frac{1}{x^i}=V_i(x+\frac{1}{x})$. Mamy oczywiście $x^0+\frac{1}{x^0}=2=V_0(x+\frac{1}{x})$ i $x+\frac{1}{x}=V_1(x+\frac{1}{x})$. Krok indukcyjny przebiega następująco:

$$x^{i+1}+\frac{1}{x^{i+1}}=\left(x^i+\frac{1}{x^i}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{i-1}+\frac{1}{x^{i-1}}\right)=$$
$$=V_i\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-V_{i-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)=V_{i+1}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Wykazaliśmy więc, że dla wielomianu $W(x)=x^i$ szukanym $V$ jest wielomian $V_i$.

Dla wielomianu $W$ postaci $W(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^n$ mamy

$$W(x)+W\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(x^i+\frac{1}{x_i}\right)=\sum_{i=0}^{n}a_iV_i\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

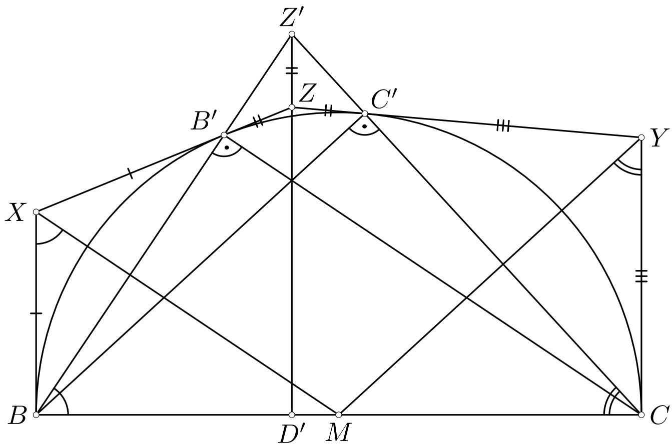
Szukanym wielomianem jest więc $V=\sum_{i=0}^{n}a_iV_i$. Kończy to dowód lematu i rozwiązanie zadania.

**5**. Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, w którym $AB<AC$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków $BC$, $CA$, $AB$ odpowiednio w punktach $D$, $E$, $F$. Punkty $X$ i $Y$ leżą na prostej $EF$, przy czym proste $BX$ i $CY$ są prostopadłe do prostej $BC$. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $BC$. Prosta symetryczna do $BX$ względem $MX$ przecina prostą symetryczną do $CY$ względem $MY$ w punkcie $Z$. Wykazać, że proste $ZD$ i $BC$ są prostopadłe.

*Autor zadania: Dominik Burek*

*Rozwiązanie:* Niech $\Omega$ będzie okręgiem o średnicy $BC$. Proste $BX$ i $CY$ są styczne do $\Omega$ odpowiednio w punktach $B$ i $C$. Oznaczmy punkt symetryczny do $B$ względem $XM$ przez $B'$. Wtedy $B'$ leży na $BZ$ i jest punktem styczności prostej $BZ$ z $\Omega$. Analogicznie, niech $C'$ będzie punktem symetrycznym do $C$ względem $YM$, wtedy $C'$ leży na $YZ$ i jest punktem styczności prostej $CZ$ z $\Omega$.

Niech $k$ będzie prostą prostopadłą do $BC$ przechodzącą przez $Z$. Oznaczmy punkt przecięcia prostych $BB'$ i $k$ przez $Z'$. Wówczas, skoro $BX = B'X$ i $BX \parallel k$, to $ZZ' = ZB'$ i półprosta $ZZ'^{\rightarrow}$ nie przecina prostej $BC$. Analogicznie pokazujemy, że $CC'$ przecina $k$ w takim punkcie $Z''$, że $ZZ'' = ZC'$, $Z''$ leży na $k$ i półprosta $ZZ''^{\rightarrow}$ nie przecina prostej $BC$. Skoro zaś $ZB' = ZC'$, dostajemy $ZZ' = ZZ''$ i w konsekwencji punkty $Z'$ i $Z''$ się pokrywają. Punkt $Z$ leży więc na wysokości trójkąta $Z'BC$.

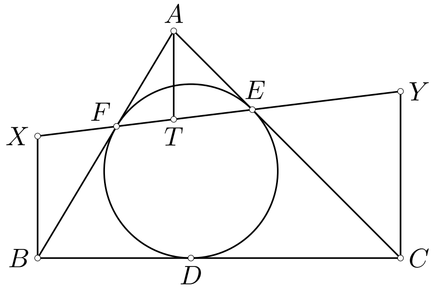



Oznaczmy spodek wysokości trójkąta $Z'BC$ opuszczonej z wierzchołka $Z'$ przez $D'$. Należy wykazać, że $\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C}$ — stąd wyniknie, że punkty $D$ i $D'$ się pokrywają, co zakończy dowód.

Mamy $XM \perp BB'$, więc $\sphericalangle D'BZ' = 90^\circ - \sphericalangle XBB' = \sphericalangle BXM$. Wobec tego trójkąty prostokątne $XMB$ i $BZ'D'$ są podobne. Wobec tego $\frac{BD'}{D'Z'} = \frac{XB}{BM}$. Analogicznie, trójkąty prostokątne $YMC$ i $CZ'D'$ są podobne, więc $\frac{CD'}{D'Z'} = \frac{CY}{CM}$. Po podzieleniu tych równości stronami otrzymujemy

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{BX \cdot CM}{BM \cdot CY} = \frac{BX}{CY},$$

gdyż $BM = CM$.

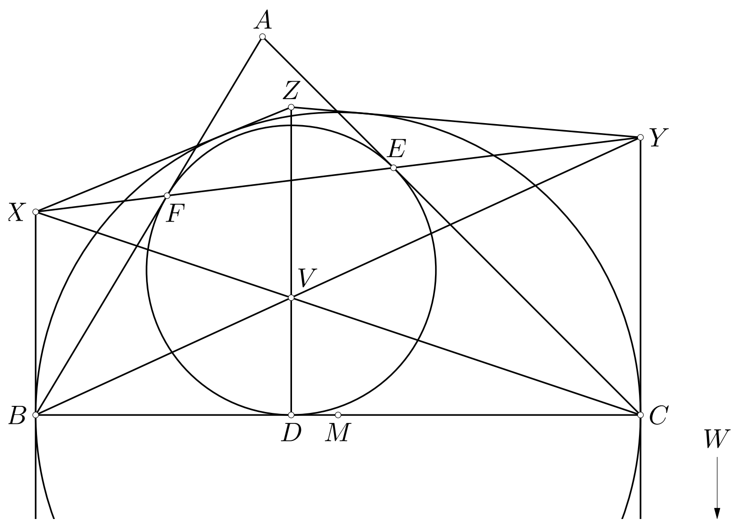



Do wykazania zostaje równość $\frac{BD}{CD} = \frac{BX}{CY}$. Oznaczmy przez $T$ taki punkt na prostej $XY$, że $AT \perp BC$. Wykorzystując trójkąty podobne $BXF$ i $ATF$ oraz $CYE$ i $ATE$ otrzymujemy $\frac{BX}{AT} = \frac{BF}{AF}$ oraz $\frac{CY}{AT} = \frac{CE}{AE}$. Wykorzystując te równości wraz z $BD = BF$, $CD = CE$ i $AE = AF$ otrzymujemy

$$\frac{BX}{CY} = \frac{BX}{AT} \cdot \frac{AT}{CY} = \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = \frac{BD}{CD},$$

co kończy dowód.

*Sposób 2.* Podobnie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że proste $XZ$ i $YZ$ są styczne do okręgu $\Omega$. Oznaczmy punkt przecięcia prostych $BY$ i $CX$ przez $V$. Oznaczmy też przez $W$ kierunek równoległych prostych $BX$, $CY$ (tzw. punkt w nieskończoności tych dwóch prostych). Wykorzystując twierdzenie Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $BXZYCW$ otrzymujemy, że prosta $ZW$ przechodzi przez $V$. To znaczy: prosta $ZV$ jest równoległa do prostych $BX$ i $CY$ (czyli jest prostopadła do $BC$).



Do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że prosta $ZV$ przecina $BC$ w takim punkcie $D'$, że $\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$. Mamy

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{XV}{VC} = \frac{BX}{CY}$$

i rozwiązanie można zakończyć tak jak w sposobie pierwszym lub np. skorzystać z twierdzenia sinusów:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{BX \cdot \frac{\sin BXF}{\sin XFB}}{CY \cdot \frac{\sin CYE}{\sin CEY}} = \frac{BX}{CY}.$$

Ilorazy sinusów skróciły się, gdyż $\sphericalangle XFB = \sphericalangle EFA = \sphericalangle AEF = \sphericalangle CEY$ oraz $\sphericalangle BXF + \sphericalangle EYC = 180°$.

**6**. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wojtek ma w ogrodzie $n$ bambusów $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Bambusy mają stałe tempa wzrostu — każdego dnia bambus $B_i$ przyrasta o dokładnie $a_i$ metrów ($a_i > 0$). Przy tym spełniona jest równość $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Każdego dnia o północy Wojtek może wybrać jednego bambusa i ściąć go przy samej ziemi — ścięty bambus po ścięciu ma wysokość 0 metrów i nie przestaje rosnąć w swoim stałym tempie wzrostu opisanym wyżej. Na początku każdy bambus ma wysokość 0 metrów. Wykazać, że Wojtek może tak wybierać bambusy do ścięcia, że żaden z nich nigdy nie będzie wyższy niż 2 metry.

*Autor zadania: Wojciech Nadara*

*Rozwiązanie:*

Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ niech $b_i = 2^{s_i}$, gdzie $s_i$ jest liczbą całkowitą spełniającą nierówności $2^{s_i - 1} < a_i \leqslant 2^{s_i}$. Wykażemy, że nawet gdyby bambus $B_i$ rósł w tempie $2^{s_i}$ na dobę, to Wojtek wciąż mógłby ścinać je w żądany sposób.

Zauważmy, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $b_i < 2a_i$. Wynika stąd, że $\sum_{i=1}^{n} b_i < 2 \sum_{i=1}^{n} a_i = 2$. Liczba $\sum_{i=1}^{n} b_i$ jest postaci $2 - k \cdot 2^s$ dla pewnej liczby całkowitej $s$. Wykażemy, że Wojtek może zasadzić $k$ nowych bambusów, z których każdy rośnie w tempie $2^s$ metrów na dobę i wciąż być w stanie ścinać bambusy w żądany sposób.

Wykażemy następujące stwierdzenie: jeśli $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są bambusami, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ bambus $B_i$ rośnie $b_i = 2^{s_i}$ metrów na dobę, przy czym $s_i$ jest liczbą całkowitą oraz $\sum_{i=1}^{n} b_i = 2$, to Wojtek może ścinać jednego bambusa dziennie w taki sposób, że dla $i = 1, 2, \ldots, n$ bambus $B_i$ jest ścinany dokładnie co $2^{-s_i+1}$ dni (w szczególności żaden z nich nigdy nie będzie wyższy niż $2^{s_i} \cdot 2^{-s_i+1} = 2$ metry). (Przyjmujemy tak jak w treści zadania, że na początku każdy bambus ma wysokość 0 metrów.)

Dowód przebiega indukcyjnie względem $n$. Dla $n = 1$ jest tylko jeden bambus, który każdej doby rośnie o dwa metry. Wystarczy ścinać go każdego dnia.

Załóżmy teraz, że $n \geqslant 2$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania można założyć, że $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Zauważmy, że $b_{n-1} = b_n$ — w przeciwnym razie $\sum_{i=1}^{n} b_i b_n^{-1} = 2b_n^{-1}$, co daje sprzeczność, bo lewa strona równości jest nieparzysta (wszystkie składniki sumy poza ostatnim są parzyste), a prawa jest parzysta.

Z założenia indukcyjnego wynika, że jeśli zastąpimy bambusy $B_{n-1}$ i $B_n$ jednym bambusem $B'_{n-1}$ o tempie wzrostu $2^{s_n+1}$ metrów na dobę, to Wojtek może ścinać bambusy w żądany sposób. Bambus $B'_{n-1}$ jest ścinany co $2^{-(s_n+1)+1} = 2^{-s_n}$ dni. Zatem w pierwotnym ogrodzie, w którym rosną bambusy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wystarczy je ścinać tak jak każe założenie indukcyjne z tą zmianą, że w dniach, w których powinien być ścinany bambus $B'_{n-1}$ ścina się na zmianę bambusy $B_{n-1}$ oraz $B_n$. W ten sposób oba bambusy $B_{n-1}$, $B_n$ są ścinane dokładnie co $2 \cdot 2^{-s_n} = 2^{-s_n+1}$ dni. Dowód indukcyjny stwierdzenia oraz rozwiązanie zadania zostały zakończone.