



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

25 marca 2026 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dane są dodatnie liczby całkowite a , b , n spełniające warunek $2a = bn$. Zbiór $\{1, 2, \dots, 2a\}$ podzielono na n parami rozłącznych zbiorów mocy b . Wykazać, że te n zbiorów można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, by zbiory w pierwszej grupie zawierały łącznie co najmniej $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$ elementów nie większych od a , a zbiory w drugiej grupie zawierały łącznie co najmniej $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$ elementów większych od a .

2. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Wykazać, że liczba $b - 1$ dzieli się przez a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby całkowitej n nie większej od $\frac{b}{2}$ spełniona jest równość

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \cdot n \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \right\rfloor.$$

Uwaga. Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x .

3. Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz dodatnich liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n spełniających równość $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ zachodzi nierówność

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \leq \sqrt{n} \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

26 marca 2026 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunek $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Załóżmy, że istnieją wielomiany P, Q o współczynnikach rzeczywistych spełniające równość $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wykazać, że istnieją wielomiany R, S o współczynnikach rzeczywistych spełniające równość $f(x) = \frac{R\left(x + \frac{1}{x}\right)}{S\left(x + \frac{1}{x}\right)}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Punkty X i Y leżą na prostej EF , przy czym proste BX i CY są prostopadłe do prostej BC . Punkt M jest środkiem odcinka BC . Prosta symetryczna do BX względem MX przecina prostą symetryczną do CY względem MY w punkcie Z . Wykazać, że proste ZD i BC są prostopadłe.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Wojtek ma w ogrodzie n bambusów B_1, B_2, \dots, B_n . Bambusy mają stałe tempa wzrostu — każdego dnia bambus B_i przyrasta o dokładnie a_i metrów ($a_i > 0$). Przy tym spełniona jest równość $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Każdego dnia o północy Wojtek może wybrać jednego bambusa i ściąć go przy samej ziemi — ścięty bambus po ścięciu ma wysokość 0 metrów i nie przestaje rosnać w swoim stałym tempie wzrostu opisanym wyżej. Na początku każdy bambus ma wysokość 0 metrów. Wykazać, że Wojtek może tak wybierać bambusy do ścięcia, że żaden z nich nigdy nie będzie wyższy niż 2 metry.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.