



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: istnieją dodatnia liczba całkowita k oraz liczby pierwsze $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ (niekoniecznie różne) spełniające równanie

$$\frac{k}{p_1} + \frac{k}{p_2} + \dots + \frac{k}{p_n} = \frac{q}{q^2 + 1}.$$

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Oznaczmy lewą stronę równania przez L , a prawą przez P . Jeśli $p_i = 2$ dla pewnego i , to $L \geq \frac{1}{2}$. Stąd $P \geq \frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{q}{q^2 + 1} \iff q^2 + 1 \leq 2q \iff (q - 1)^2 \leq 0 \iff q = 1.$$

Sprzeczność, bo q jest liczbą pierwszą.

Wobec tego liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$ są nieparzystymi liczbami pierwszymi. Wykażemy, że $q = 2$. Załóżmy przeciwnie — liczba q jest nieparzysta. Po przemnożeniu równania przez $p_1 p_2 \dots p_n (q^2 + 1)$ otrzymujemy równość, w której lewa strona jest parzysta (bo dzieli się przez parzystą liczbę $q^2 + 1$), a prawa jest nieparzysta — sprzeczność. Zatem $q = 2$ i $P = \frac{2}{5}$.

Liczba k nie jest podzielna przez żadną z liczb p_i , gdyż wtedy $L \geq 1$. Ponadto, p_i występuje wśród liczb $p_1, p_2, \dots, p_n$ mniej niż p_i razy — w przeciwnym razie $L \geq 1$. Rozważmy więc liczbę p_i i powiedzmy, że występuje ona wśród liczb $p_1, p_2, \dots, p_n$ dokładnie s razy (mamy więc $1 \leq s < p_i$). Sprowadzając ułamki w wyrażeniu

$$\frac{k}{p_1} + \frac{k}{p_2} + \dots + \frac{k}{p_n}$$

do wspólnego mianownika zapisujemy L w postaci ułamka, którego mianownik dzieli się przez p_i , a licznik nie — jest on bowiem sumą liczb podzielnych przez p_i oraz liczby $sk \cdot A$, gdzie A jest iloczynem liczb pierwszych różnych od p_i . Skądinąd wiemy, że $L = P = \frac{2}{5}$, co jest ułamkiem zapisanym w postaci nieskracalnej. Stąd wniosek, że p_i jest dzielnikiem piątki, tj. $p_i = 5$.

Wykazaliśmy więc, że $p_i = 5$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, a zatem $L = \frac{kn}{5}$. Dochodzimy do równania $kn = 2$, które ma dwa rozwiązania: $(k, n) = (1, 2)$ oraz $(k, n) = (2, 1)$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że dla $n = 1$, $k = 2$, $p_1 = 5$, $q = 2$ oraz dla $n = 2$, $k = 1$, $p_1 = p_2 = 5$, $q = 2$ warunki zadania są spełnione.

Odpowiedź: Jedyne możliwe wartości n to 1 i 2.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Załóżmy, że liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają następujące warunki:

- $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$,
- $\frac{1}{k} \leq a_k \leq k$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$.

Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 1}{k} a_k > 2n.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Z założeń wynika, że

$$0 \leq (k - a_k) \left(a_k - \frac{1}{k} \right) = a_k \left(k + \frac{1}{k} \right) - 1 - a_k^2$$

dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = k$ lub $a_k = \frac{1}{k}$. Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{k^2 + 1}{k} a_k \geq 1 + a_k^2.$$

Wobec tego

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 1}{k} a_k \geq \sum_{k=1}^n (1 + a_k^2) = 2n.$$

Pozostaje wykazać, że w powyższej nierówności nie może zajść równość. Dzieje się tak, gdy dla każdego k mamy $a_k = k$ lub $a_k = \frac{1}{k}$.

Założmy więc, że dla każdego k mamy $a_k = k$ lub $a_k = \frac{1}{k}$. Oznaczmy przez I zbiór wskaźników $k \geq 2$, dla których $a_k = \frac{1}{k}$. Wówczas zbiór I jest

niepusty, bo należy do niego n (mamy bowiem $n^2 > n = \sum_{k=1}^n a_k^2 > a_n^2$, a więc $a_n < n$). Mamy

$$0 < \sum_{k \in I} a_k^2 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

więc liczba $\sum_{k \in I} a_k^2$ nie jest całkowita. Stąd $\sum_{k=1}^n a_k^2$ również nie jest całkowita. Sprzeczność z założeniem, że ta suma jest równa n .

3. Dany jest ostrosłup $ABCD$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Załóżmy, że dwusieczne kątów płaskich BAD , BSD i BCD mają punkt wspólny. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABS , BCS , CDS , DAS leżą na jednej płaszczyźnie.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie: Oznaczmy środki okręgów wpisanych w ściany ABS , BCS , CDS , DAS kolejno przez I_1 , I_2 , I_3 , I_4 . Oznaczmy punkt wspólny dwusiecznych kątów płaskich BAD , BCD , BSD przez X . Punkt X leży w części wspólnej płaszczyzn $ABCD$ i BDS , czyli na prostej BD . Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że ułamki

$$\frac{BX}{XD}, \quad \frac{BA}{AD}, \quad \frac{BC}{CD}, \quad \frac{BS}{SD}$$

są równe. Ich wspólną wartość oznaczmy przez λ .

Jeśli $\lambda = 1$, to ostrosłup $ABCD$ jest symetryczny względem płaszczyzny ACS . W konsekwencji punkt I_1 jest symetryczny do I_4 względem ACS i analogicznie I_2 jest symetryczny do I_3 względem tej płaszczyzny. Stąd proste I_1I_4 i I_2I_3 są równoległe (obie są prostopadłe do płaszczyzny ACS), a więc są zawarte w jednej płaszczyźnie.

Od teraz rozważamy przypadek $\lambda \neq 1$. Mamy

$$\frac{SB}{BA} = \frac{SD}{DA}.$$

Stąd i z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że proste BI_1 i DI_4 przecinają krawędź AS w tym samym punkcie, który oznaczmy przez T . Wykorzystując ponownie twierdzenie o dwusiecznej obliczamy

$$\frac{BI_1}{I_1T} = \frac{BA}{AT}$$

i analogicznie

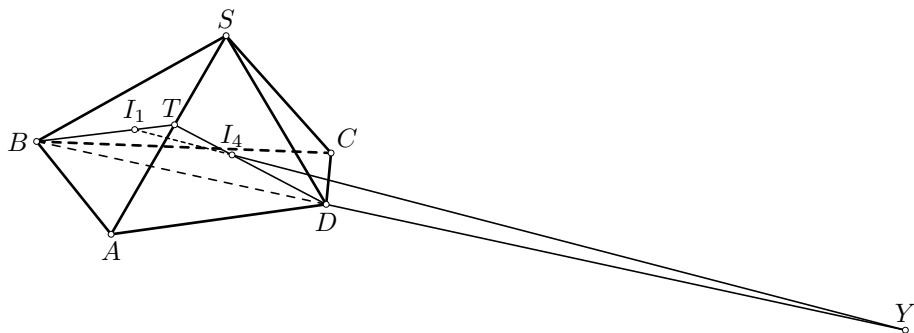
$$\frac{DI_4}{I_4T} = \frac{DA}{AT}.$$

Stąd

$$\frac{BI_1}{I_1T} \cdot \frac{TI_4}{I_4D} = \frac{BA}{AT} \cdot \frac{AT}{DA} = \frac{BA}{DA} = \lambda.$$

Z twierdzenia Menelaosa zastosowanego do trójkąta BTD i prostej I_1I_4 wynika więc, że prosta I_1I_4 przecina prostą BD w takim punkcie Y nie należącym na odcinku BD , że $\frac{BY}{YD} = \lambda$.

W pełni analogicznie wykazujemy, że I_2I_3 przecina prostą BD w punkcie Y' nie należącym na odcinku BD spełniającym równość $\frac{BY'}{Y'D} = \lambda$. To znaczy, że punkty Y i Y' się pokrywają.



4. Dany jest nierównoramienny trójkąt ABC wpisany w okrąg Ω o środku O . Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu Ω , który nie zawiera punktu A . Okrąg opisany na trójkącie AOM przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach $P \neq A$ i $Q \neq A$. Załóżmy, że punkty A, B, P leżą w tej kolejności na prostej AB , a punkty Q, A, C leżą w tej kolejności na prostej AC . Wykazać, że symetralna odcinka PQ przecina prostą prostopadłą do BC przechodzącą przez punkt A w punkcie leżącym na okręgu Ω .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Niech $X \neq A$ będzie takim punktem na Ω , że $AX \perp BC$.

Zauważmy, że $\sphericalangle MPQ = 180^\circ - \sphericalangle QAM = \sphericalangle MAC = \sphericalangle PAM = \sphericalangle PQM$, zatem trójkąt PQM jest równoramienny i $PM = QM$. Aby wykazać tezę wystarczy zatem udowodnić, że prosta MX jest dwusieczną kąta QMP .

Oznaczmy $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle CBA = 2\beta$ i $\sphericalangle ACB = 2\gamma$. Wówczas zachodzi równość $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, gdyż kąty trójkąta ABC sumują się do 180° . Mamy

$$\sphericalangle QMP = \sphericalangle QAP = 180^\circ - \sphericalangle PAC = 180^\circ - 2\alpha = 2\beta + 2\gamma.$$

Wystarczy zatem wykazać, że $\sphericalangle QMX = \beta + \gamma$. Obliczmy najpierw miary kątów OMX i OMQ . Mamy

$$\begin{aligned}\sphericalangle OMX &= 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle XOM = 90^\circ - \sphericalangle XAM = 90^\circ - (\sphericalangle BAM - \sphericalangle BAX) = \\ &= 90^\circ - (\alpha - (90^\circ - 2\beta)) = 180^\circ - \alpha - 2\beta = 90^\circ - \beta + \gamma\end{aligned}$$

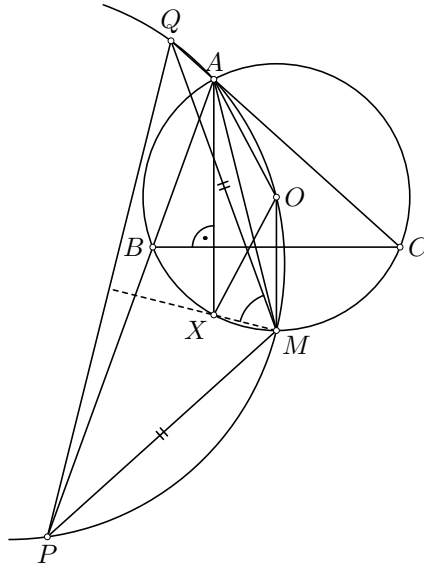
oraz

$$\sphericalangle OMQ = 180^\circ - \sphericalangle QAO = \sphericalangle OAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle COA = 90^\circ - 2\beta.$$

W takim razie

$$\sphericalangle QMX = \sphericalangle OMX - \sphericalangle OMQ = 90^\circ - \beta + \gamma - (90^\circ - 2\beta) = \beta + \gamma,$$

co kończy dowód.



5. Dana jest dodatnia liczba całkowita $n \geq 2$. Na płaszczyźnie zaznaczono $2n$ punktów $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$, przy czym spełnione są następujące dwa warunki:

- (i) $A_i B_i > 101$ dla każdego $1 \leq i \leq n$,
- (ii) $A_i B_j \leq 100$ dla każdych $1 \leq i < j \leq n$.

Wykazać, że $n \leq 10^6$.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że dla dowolnych $1 \leq i < j \leq n$ zachodzi $B_i B_j > 1$. Wynika to z nierówności trójkąta, gdyż

$$101 < A_i B_i \leq A_i B_j + B_i B_j \leq 100 + B_i B_j.$$

Jeżeli zatem zdefiniujemy koła $K_1, K_2, \dots, K_n$ o środkach odpowiednio $B_1, B_2, \dots, B_n$, każde o promieniu $\frac{1}{2}$, to będą one rozłączne.

Zauważmy ponadto, że skoro $A_1 B_i \leq 100$ dla $i = 2, \dots, n$, to koła $K_2, \dots, K_n$ mieszczą się w kole L o środku A_1 i promieniu $100 + \frac{1}{2} = \frac{201}{2}$. Stąd wniosek, że $P(K_2) + \dots + P(K_n) \leq P(L)$, gdzie $P(C)$ oznacza pole koła C . Jako że L ma 201 razy większy promień niż każde z kół K_i , otrzymujemy $P(L) = 201^2 P(K_i)$ dla dowolnego $1 \leq i \leq n$. Wnioskujemy zatem, że $P(L) \geq P(K_2) + \dots + P(K_n) = (n-1)P(K_2) = \frac{n-1}{201^2} P(L)$, zatem $n \leq 201^2 + 1 = 40402 < 10^6$, co kończy dowód.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ spełniają równość

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

dla pewnych $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{1, 2\}$. Udowodnić, że $a_i \leq (2n)^{2^{i-1}}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Mamy $a_1 \leq a_k$ i $x_k \leq 2$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$. Stąd $\frac{x_k}{a_k} \leq \frac{2}{a_1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ i wobec tego

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} \leq \frac{2n}{a_1}.$$

To daje $a_1 \leq 2n$, czyli tezę dla $i = 1$.

Założmy teraz, że $1 \leq i \leq n-1$ oraz $a_j \leq (2n)^{2^{j-1}}$ dla każdego $1 \leq j \leq i$. Wykażemy, że $a_{i+1} \leq (2n)^{2^i}$, co na mocy zasady indukcji matematycznej zakończy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że

$$1 - \sum_{k=1}^i \frac{x_k}{a_k} = \sum_{k=i+1}^n \frac{x_k}{a_k} > 0.$$

Lewa strona powyższej nierówności jest dodatnią liczbą wymierną, którą można zapisać w postaci ułamka o mianowniku $a_1 a_2 \dots a_i$. W takim razie

$$1 - \sum_{k=1}^i \frac{x_k}{a_k} \geq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i}.$$

Z założenia indukcyjnego mamy

$$a_1 a_2 \dots a_i \leq (2n) \cdot (2n)^2 \cdot (2n)^4 \cdot \dots \cdot (2n)^{2^{i-1}} = (2n)^{2^i - 1}.$$

W takim razie

$$\frac{1}{(2n)^{2^i - 1}} \leq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} \leq 1 - \sum_{k=1}^i \frac{x_k}{a_k} = \sum_{k=i+1}^n \frac{x_k}{a_k} \leq \sum_{k=i+1}^n \frac{2}{a_{i+1}} \leq \frac{2n}{a_{i+1}}$$

Wobec tego $a_{i+1} \leq (2n)^{2^i}$, co kończy krok indukcyjny i rozwiązanie zadania.