



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2026 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: istnieją dodatnia liczba całkowita k oraz liczby pierwsze $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ (niekoniecznie różne) spełniające równanie

$$\frac{k}{p_1} + \frac{k}{p_2} + \dots + \frac{k}{p_n} = \frac{q}{q^2 + 1}.$$

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Załóżmy, że liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają następujące warunki:

- $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$,
- $\frac{1}{k} \leq a_k \leq k$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$.

Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 1}{k} a_k > 2n.$$

3. Dany jest ostrosłup $ABCD$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Załóżmy, że dwusieczne kątów płaskich BAD , BSD i BCD mają punkt wspólny. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABS , BCS , CDS , DAS leżą na jednej płaszczyźnie.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsię dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

14 lutego 2026 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest nierównoramienny trójkąt ABC wpisany w okrąg Ω o środku O . Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu Ω , który nie zawiera punktu A . Okrąg opisany na trójkącie AOM przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach $P \neq A$ i $Q \neq A$. Załóżmy, że punkty A, B, P leżą w tej kolejności na prostej AB , a punkty Q, A, C leżą w tej kolejności na prostej AC . Wykazać, że symetralna odcinka PQ przecina prostą prostopadłą do BC przechodzącą przez punkt A w punkcie leżącym na okręgu Ω .

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita $n \geq 2$. Na płaszczyźnie zaznaczono $2n$ punktów $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$, przy czym spełnione są następujące dwa warunki:

- (i) $A_i B_i > 101$ dla każdego $1 \leq i \leq n$,
- (ii) $A_i B_j \leq 100$ dla każdych $1 \leq i < j \leq n$.

Wykazać, że $n \leq 10^6$.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ spełniają równość

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

dla pewnych $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{1, 2\}$. Udowodnić, że $a_i \leq (2n)^{2^{i-1}}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsię dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.