



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Piotrek bawi się kamykami. Początkowo ma pusty stos. W i -tym ruchu jeśli może zabrać ze stosu i kamyków, to to robi, a w przeciwnym razie — dokłada na stos i kamyków. W kolejnych ruchach liczby kamyków na stosie są więc równe: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, ...

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że po n ruchach na stosie Piotrka nie ma żadnych kamyków.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że po t ruchach stos jest pusty. Udowodnimy przez indukcję, że dla każdego $i = 0, 1, 2, \dots, t+1$ po wykonaniu $(t+2i+1)$ -szego ruchu stos zawiera $t+1-i$ kamyków. Dla $i = 0$ jest to prawda — po t ruchach stos był pusty, więc w $(t+1)$ -szym ruchu Piotrek musi dołożyć $t+1$ kamyków. W kroku indukcyjnym załóżmy, że po $t+2i+1$ ruchach, gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, t$, stos zawiera $t+1-i$ kamyków. Ponieważ $t+1-i < t+2i+2$, więc w $(t+2i+2)$ -gim ruchu Piotrek dokłada na stos $t+2i+2$ kamyków. Wówczas stos zawiera $t+1-i + (t+2i+2) = 2t+i+3$ kamyków. (Zauważmy przy okazji, że stos w tym momencie nie jest pusty.) Ponieważ $2t+i+3 \geq t+2i+3$, więc w $(t+2i+3)$ -cim ruchu Piotrek zdejmuję ze stosu $t+2i+3$ kamyki, a na stosie pozostaje $2t+i+3 - (t+2i+3) = t-i = t+1 - (i+1)$ kamyków. Dowód indukcyjny został zakończony.

Z powyższej dyskusji wynika, że jeśli stos był pusty po t ruchach, to następny moment, w którym stos staje się pusty występuje po $(3t+3)$ -cim ruchu.

numer ruchu	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	...	$3t$	$3t+1$	$3t+2$	$3t+3$
liczba kamyków	0	$t+1$	$2t+3$	t	$2t+4$	$t-1$	...	$3t+2$	1	$3t+3$	0

Oznaczmy przez a_k liczbę ruchów, po której stos staje się pusty po raz k -ty. Wówczas $a_1 = 3$ oraz $a_k = 3a_{k-1} + 3$ dla $k \geq 2$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
 a_k + \frac{3}{2} &= 3a_{k-1} + \frac{9}{2} = 3 \left(a_{k-1} + \frac{3}{2} \right) = 3^2 \left(a_{k-2} + \frac{3}{2} \right) = \dots = \\
 &= 3^{k-1} \left(a_1 + \frac{3}{2} \right) = 3^{k-1} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3^{k+1}}{2}.
 \end{aligned}$$

W takim razie $a_k = \frac{3^{k+1} - 3}{2}$ dla dowolnego $k \geq 1$.

Odpowiedź: Liczby postaci $\frac{3^{k+1} - 3}{2}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$

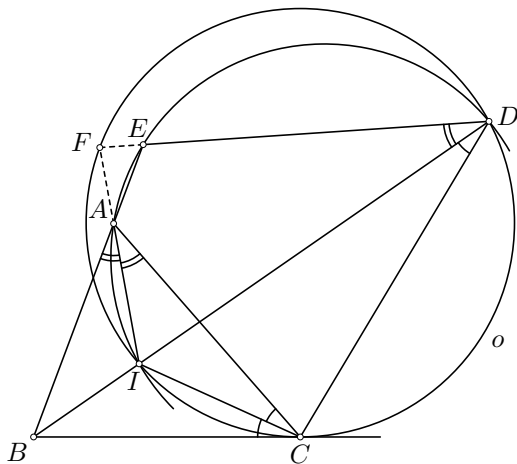
2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg o przechodzi przez punkt I i jest styczny do prostej BC w punkcie C . Półprosta BI przecina o w punkcie $D \neq I$. Półprosta BA przecina okrąg opisany na trójkącie ADI w punkcie $E \neq A$ leżącym poza odcinkiem AB . Wykazać, że proste DE i AI przecinają się w punkcie leżącym na o .

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Oznaczmy $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc AI i CI są dwusiecznymi kątów BAC i ACB .

Wykorzystując zależność między kątem wpisanym opartym na łuku i kątem dopisanym do tego samego łuku dostajemy $\sphericalangle IDC = \sphericalangle ICB = \frac{1}{2}\gamma$. Ponadto $\sphericalangle EDI = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\alpha$, gdyż czworokąt $AIDE$ jest wpisany w okrąg.

Niech F będzie punktem przecięcia prostych AI i DE . Należy udowodnić, że czworokąt $DCIF$ jest wpisany w okrąg. W tym celu wystarczy sprawdzić, że suma przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180° . Zauważmy, że $\sphericalangle CIF = \sphericalangle CIA = 180^\circ - \sphericalangle ACI - \sphericalangle IAC = 180^\circ - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\alpha$. Z drugiej strony $\sphericalangle FDC = \sphericalangle EDI + \sphericalangle IDC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$. Stąd $\sphericalangle CIF + \sphericalangle FDC = 180^\circ$, co kończy dowód.



3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Załóżmy, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ (przyjmujemy $x_{2n+2} = x_1$). Wykazać, że

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}).$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Określmy $x_{2n+1+i} = x_i$ dla dowolnego $i = 2, 3, \dots, 2n+1$. Mamy dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$

$$\begin{aligned} 2x_k &= (x_k + x_{k+1}) - (x_{k+1} + x_{k+2}) + (x_{k+2} + x_{k+3}) - (x_{k+3} + x_{k+4}) + \\ &+ \dots + (x_{2n+k-2} + x_{2n+k-1}) - (x_{2n+k-1} + x_{2n+k}) + (x_{2n+k} + x_{2n+1+k}). \end{aligned}$$

Z nierówności trójkąta oraz założenia, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2|x_k| &\leq |x_k + x_{k+1}| + |x_{k+1} + x_{k+2}| + \dots + |x_{2n+k} + x_{2n+1+k}| = \\ &= |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + \dots + |x_{2n} + x_{2n+1}| + |x_{2n+1} + x_1| = \\ &= (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2n} + x_{2n+1}) + (x_{2n+1} + x_1) = \\ &= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Wobec tego $|x_k| \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}$ dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Sumując tę nierówność dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ otrzymujemy tezę.

Sposób 2. Oznaczmy $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{2n+1}|\}$. Wówczas

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n+1) \cdot M$$

i do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że

$$M \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}. \quad (\clubsuit)$$

Udowodnimy, że $M = x_j$ dla pewnego j . Wprost z definicji M wynika, że $M = |x_k|$ dla pewnego k . Jeśli $x_k \geq 0$, to mamy postulowaną własność dla $j = k$. W przeciwnym razie $x_k < 0$ i $M = -x_k$. Z założeń zadania wiadomo, że $x_k + x_{k+1} \geq 0$, skąd otrzymujemy

$$M \geq |x_{k+1}| \geq x_{k+1} \geq -x_k = M \implies M = x_{k+1}$$

i znów mamy postulowaną własność dla $j = k+1$.

Bez ograniczenia ogólności rozumowania można założyć, że $j = 1$, tj. $M = x_1$ (można w razie potrzeby cyklicznie przesunąć indeksy — nie zmienia to ani założeń ani tezy zadania). Dodając do równości $x_1 = M$ nierówności $x_2 + x_3 \geq 0$, $x_4 + x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_{2n} + x_{2n+1} \geq 0$ otrzymujemy nierówność ($\clubsuit$), do której wcześniej sprowadziliśmy tezę zadania.

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a , b . Załóżmy, że liczba $a^2 + ab$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. Wykazać, że jeśli $b > 1$, to

$$b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$$

oraz wyznaczyć wszystkie pary liczb (a, b) spełniające warunki zadania, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Zapiszmy $a^2 + ab = a(a + b) = n(n + 1)$ dla pewnej liczby całkowitej n . Bez straty ogólności można założyć, że $n \geq 1$. Z założenia $b > 1$ wynika, że $n(n + 1) = a(a + b) > a(a + 1)$, a to oznacza, że $n > a$, bo funkcja $x \mapsto x(x + 1)$ jest rosnąca na zbiorze $(0, \infty)$.

Zapiszmy $n = a + m$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m . Wówczas

$$a(a + b) = (a + m)(a + m + 1)$$

$$a^2 + ab = a^2 + 2am + m^2 + a + m$$

$$ab - 2am - a = m^2 + m$$

$$a(b - 2m - 1) = m(m + 1)$$

Prawa strona ostatniej równości jest dodatnia, więc lewa strona też jest dodatnia. W konsekwencji $b - 2m - 1 > 0$, skąd $b \geq 2m + 2$. Ponadto a jest dzielnikiem liczby $m(m + 1)$, więc $a \leq m(m + 1)$. Wobec tego

$$1 + \sqrt{4a + 1} \leq 1 + \sqrt{4m(m + 1) + 1} = 1 + \sqrt{(2m + 1)^2} = 1 + (2m + 1) \leq b,$$

co było do udowodnienia.

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w szacowaniach $a \leq m(m + 1)$ i $b \geq 2m + 2$ zachodzi równość, tj. gdy $a = m(m + 1)$ i $b = 2(m + 1)$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m . Wyznaczone pary (a, b) w istocie spełniają warunki zadania, bo

$$a(a + b) = m(m + 1)(m(m + 1) + 2(m + 1)) = (m^2 + 2m)(m^2 + 2m + 1).$$

Odpowiedź: Pary (a, b) postaci $(m(m + 1), 2(m + 1))$, gdzie $m = 1, 2, 3, \dots$

5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, n spełniających równanie $3^k + n^3 + 6 = k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Oznaczmy $L = 3^k + n^3 + 6$ i $P = k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)$. Wykażemy, że jeśli $n = 1$ lub $n = 2$, to $L > P$, co oznaczać będzie, że w tych przypadkach równanie nie ma rozwiązań. W tym celu udowodnimy przez indukcję, że $3^k > k(k+1)$ dla dowolnego $k \geq 1$. Baza indukcji jest jasna, bo $3 > 1 \cdot 2$. W kroku indukcyjnym założymy, że $3^k > k(k+1)$ dla pewnego $k \geq 1$. Wówczas

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k(k+1) \geq (k+1)(k+2),$$

przy czym ostatnie szacowanie wynika z tego, że $3k \geq k+2$ dla $k \geq 1$. Z zasady indukcji wynika więc, że $3^k > k(k+1)$ dla każdego $k \geq 1$.

Od teraz zakładamy, że $n \geq 3$. P jest iloczynem co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych. Któraś z nich jest podzielna przez 3, więc P też dzieli się przez 3. Przez 3 dzieli się też liczby 3^k i 6, więc z równania wynika, że n^3 też dzieli się przez 3. Wobec tego n dzieli się przez 3.

Jeśli $k = 1$, to $L = n^3 + 9$ i $P = n!$. Gdy $n \geq 9$, to P dzieli się przez 27, a L nie (L daje resztę 9 przy dzieleniu przez 27). Zatem $n < 9$. Dla $n = 3$ mamy $L = 36$ i $P = 6$. Dla $n = 6$ liczba L jest nieparzysta, a P parzysta. Zatem nie ma rozwiązań dla $k = 1$.

Do rozważenia pozostał przypadek $k \geq 2$. Wówczas L nie dzieli się przez 9 (daje resztę 6 z dzielenia przez 9). Gdy $n \geq 6$, to P jest iloczynem co najmniej sześciu kolejnych liczb całkowitych. Wśród nich dwie dzielą się przez 3 i w rezultacie P dzieli się przez 9. Równanie nie ma wtedy rozwiązań. Zatem $n < 6$, tj. $n = 3$. Mamy więc $L = 3^k + 33$, $P = k(k+1)(k+2)$. Bezpośrednio obliczamy L i P dla małych k :

k	2	3	4
L	42	60	114
P	24	60	120

Wykażemy, że jeśli $k \geq 5$, to $L > P$. W tym celu wystarczy udowodnić, że $3^k > k(k+1)(k+2)$ dla $k \geq 5$. Wykażemy to indukcyjnie. Dla $k = 5$ jest to prawda: $3^5 = 243 > 210 = 5 \cdot 6 \cdot 7$. Wykażemy, że jeśli $3^k > k(k+1)(k+2)$ dla pewnego $k \geq 5$, to $3^{k+1} > (k+1)(k+2)(k+3)$. Mamy

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k(k+1)(k+2) > (k+1)(k+2)(k+3),$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z szacowania $3k > k+3$ słusznego dla $k \geq 5$. Dowód zakończony.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem jest $k = n = 3$.

6. Dany jest ciąg 2025 liczb rzeczywistych, których suma wynosi 0, nie składający się z samych zer. Będziemy modyfikować ten ciąg zgodnie z następującą procedurą. Oznaczamy przez A liczbę dodatnich liczb w tym ciągu, przez B liczbę ujemnych liczb w tym ciągu, a przez S sumę wszystkich dodatnich liczb w tym ciągu. Od każdej dodatniej liczby w tym ciągu odejmujemy $\frac{S}{A}$, a do każdej ujemnej liczby w ciągu dodajemy $\frac{S}{B}$. Otrzymujemy w ten sposób nowy ciąg 2025 liczb rzeczywistych, do którego można zastosować opisaną wyżej procedurę ponownie (o ile otrzymany ciąg nie składa się z samych zer). Wykazać, że po wykonaniu tej procedury pewną skończoną liczbę razy otrzymamy ciąg, w którym wartości bezwzględne wszystkich wyrazów są mniejsze od $\frac{1}{2025}$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Jeśli po wykonaniu pewnej liczby razy procedury otrzymamy ciąg zerowy, to teza jest oczywista. Od teraz będziemy zakładać, że sukcesywne wykonywanie procedury nigdy nie wyzeruje ciągu.

Oznaczmy dodatnie liczby występujące w ciągu przez $x_1, x_2, \dots, x_A$. Niech X będzie największą z nich i niech $S = x_1 + x_2 + \dots + x_A$. Wskutek wykonania procedury liczba x_i zostaje zamieniona na liczbę $x'_i = x_i - \frac{S}{A}$. Zauważmy, że

$$x'_i = x_i - \frac{S}{A} \leq x_i - \frac{x_i}{A} = \frac{A-1}{A}x_i \leq \frac{A-1}{A}X$$

oraz

$$x'_i = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A (x_i - x_j) \geq \frac{A-1}{A} \cdot (-X),$$

gdyż i -ty składnik sumy jest zerem, a każdy inny szacuje się z dołu przez $-X$. Otrzymane dwie nierówności prowadzą do wniosku, że $|x'_i| \leq \frac{A-1}{A}X$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, A$.

Wykażemy analogiczne szacowania dla ujemnych liczb w naszym ciągu. Oznaczmy je przez $y_1, y_2, \dots, y_B$ i niech Y będzie najmniejszą z nich (czyli największą co do wartości bezwzględnej). Mamy $y_1 + y_2 + \dots + y_B = -S$. Liczba y_i zostaje zamieniona na $y'_i = y_i + \frac{S}{B}$. Zauważmy, że

$$y'_i = y_i + \frac{S}{B} \geq y_i - \frac{y_i}{B} = \frac{B-1}{B}Y$$

oraz

$$y'_i = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B (y_i - y_j) \leq \frac{B-1}{B} \cdot (-Y),$$

gdyż i -ty składnik sumy jest zerem, a każdy inny szacuje się z góry przez $-Y$. Zatem $|y'_i| \leq \frac{B-1}{B} \cdot (-Y)$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, B$.

Oznaczmy teraz $M = \max(X, -Y)$, tj. M jest największą z wartości bezwzględnych wyrazów początkowego ciągu. Mamy

$$|x'_i| \leq \frac{A-1}{A} X \leq \left(1 - \frac{1}{A}\right) M \leq \left(1 - \frac{1}{2025}\right) M = \frac{2024}{2025} M$$

dla $i = 1, 2, \dots, A$ oraz

$$|y'_i| \leq \frac{B-1}{B} (-Y) \leq \left(1 - \frac{1}{B}\right) M \leq \left(1 - \frac{1}{2025}\right) M = \frac{2024}{2025} M$$

dla $i = 1, 2, \dots, B$. Wobec tego wykonanie procedury pomniejsza największą z wartości bezwzględnych wyrazów ciągu o czynnik nie większy od $\frac{2024}{2025}$.

Niech M_k oznacza największą z wartości bezwzględnych wyrazów ciągu po wykonaniu procedury k razy. Wówczas $M_{k+1} \leq \frac{2024}{2025} M_k$ dla każdego $k \geq 0$. Stąd wynika, że $M_k \leq \left(\frac{2024}{2025}\right)^k M_0$. Dla dostatecznie dużych k (a konkretnie dla $k > \log_{2025/2024}(2025M_0)$) zachodzi nierówność $\left(\frac{2024}{2025}\right)^k M_0 < \frac{1}{2025}$. Każde takie k spełnia tezę.

7. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty E i F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Punkty K , L , M są odpowiednio środkami odcinków BD , BC , DC . Wykazać, że proste EK , AL , FM przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy przecięcie prostych AB i DF przez Y , a przecięcie prostych AC i DE przez Z . Punkty Y i Z istnieją — z założenia kąt BAC nie jest prosty, więc $AB \nparallel DF$ i $AC \nparallel DE$.

Odcinki YF i ZE są wysokościami trójkąta AYZ . Punkt D jest zatem ortocentrum tego trójkąta, a stąd wynika, że $AD \perp YZ$. W konsekwencji $YZ \parallel BC$, gdyż obie proste są prostopadłe do BC .

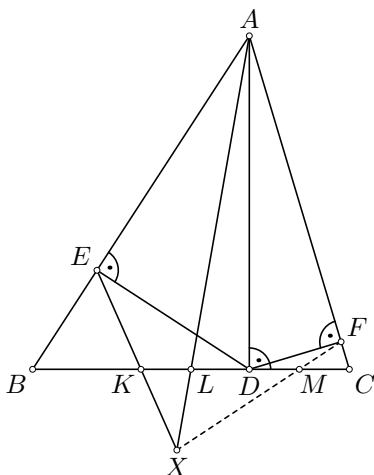
Sposób 2. Na początek zauważmy, że $BK = \frac{1}{2}BD$ i $BL = \frac{1}{2}BC$, gdyż K i L są odpowiednio środkami odcinków BD i BC . Trójkąty prostokątne BDA , BED i DEA są podobne (cecha kąt-kąt), więc

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{ED}{EB} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{AD^2}{DB^2}.$$

Punkt E leży na odcinku AB , bo jest spodkiem wysokości trójkąta prostokątnego BDA opuszczonej z wierzchołka przy kącie prostym. Punkt K leży na odcinku BL , bo $BK = \frac{1}{2}BD < \frac{1}{2}BC = BL$. (Stąd przy okazji wynika, że $KL = BL - BK = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CD$.) Prosta EK przecina dwa boki trójkąta ABL (AB i BL), a zatem przecina przedłużenie trzeciego boku lub jest do niego równoległa. Wykażemy, że druga opcja odpada. Trójkąty BKE i BLA byłyby wtedy podobne. Ponieważ K jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego BDE , więc $BK = KE$. Wtedy mielibyśmy $BL = LA$, a skoro $BL = LC$, punkt L byłby środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Skoro L leży na BC , oznaczałoby to, że kąt BAC jest prosty wbrew założeniom zadania.

Zatem proste EK i AL przecinają się w punkcie leżącym poza odcinkiem AL . Oznaczmy ten punkt przez X . Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta ALB i prostej EK wynika, że

$$\frac{AX}{XL} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BK}{KL} = \frac{AD^2}{BD^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}DC} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}.$$



W pełni analogicznie dowodzimy, że prosta FM przecina AL w punkcie X' leżącym poza odcinkiem AL i spełniającym równość $\frac{AX'}{X'L} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}$.

Istnieje tylko jeden punkt na prostej AL o opisanych własnościach — stąd $X = X'$, co dowodzi tezy zadania.

8. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . *Permutacją* nazywamy każdą różnowartościową funkcję $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Dane są parami różne permutacje $f_1, \dots, f_N$ spełniające następujący warunek: dla dowolnych (niekoniecznie różnych) indeksów i, j istnieje takie k , że $f_i \circ f_j = f_k$, gdzie $\circ$ oznacza złożenie funkcji. Dla $1 \leq i < j \leq n$ niech $Z(i, j)$ oznacza liczbę tych indeksów ℓ , że $f_\ell(i) > f_\ell(j)$. Udowodnić, że

$$\frac{N}{2} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j)^2.$$

Autor zadania: Krzysztof Salata

Rozwiązanie: Odnotujmy najpierw, że różnowartościowa funkcja ze zbioru skończonego w ten sam zbiór jest bijekcją, a zatem istnieje do niej funkcja odwrotna. Oznaczmy przez X zbiór danych permutacji $f_1, f_2, \dots, f_N$. Wykażemy, że jeśli $f \in X$, to funkcja odwrotna do f , którą oznaczać będziemy przez f^{-1} , również należy do X . Rozważmy ciąg $f, f^2, f^3, \dots$ (przez f^k oznaczamy k -krotne złożenie funkcji f , tj. $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ razy}}$). Wszystkie wy-

pisane funkcje należą do X na mocy założeń zadania. Na powyższej liście któreś dwie funkcje są takie same — istnieje bowiem tylko $n!$ permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. To oznacza, że $f^k = f^\ell$ dla pewnych $k > \ell$. Wtedy $f^{k-\ell} = \text{id}$ (symbol id oznacza funkcję identycznościową), a stąd $f^{k-\ell-1}$ jest funkcją odwrotną do f , gdyż $f \circ f^{k-\ell-1} = f^{k-\ell} = \text{id}$.

Permutację f nazwiemy (i, j) -zgodną, jeśli $i < j$ i $f(i) < f(j)$. Permutację f nazwiemy (i, j) -niezgodną, gdy $i < j$ i $f(i) > f(j)$. Liczba $Z(i, j)$ jest więc liczbą (i, j) -niezgodnych permutacji w zbiorze X . Oznaczmy liczbę (i, j) -zgodnych permutacji w zbiorze X przez $T(i, j)$. Każda permutacja jest (i, j) -zgodna lub (i, j) -niezgodna, a zatem $T(i, j) + Z(i, j) = N$ dla dowolnych $i < j$. Lewa strona dowodzonej równości jest równa

$$\frac{1}{2} \sum_{i < j} N \cdot Z(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} Z(i, j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} T(i, j) Z(i, j),$$

zatem wystarczy udowodnić, że

$$\sum_{i < j} T(i, j) Z(i, j) = \sum_{i < j} Z(i, j)^2. \quad (\heartsuit)$$

Rozważmy czwórki (i, j, f, g) , takie że $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $f, g \in X$. Zbiór wszystkich takich czwórek oznaczmy przez $\mathcal{C}$. Lewa strona równości $(\heartsuit)$ zlicza te czwórki $(i, j, f, g) \in \mathcal{C}$, w których $i < j$, f jest (i, j) -zgodna, a g jest (i, j) -niezgodna. Oznaczmy zbiór tych czwórek przez $\mathcal{L}$. Prawa strona równości $(\heartsuit)$ zlicza te czwórki $(i, j, f, g) \in \mathcal{C}$, że $i < j$, a f i g są (i, j) -niezgodne. Oznaczmy zbiór tych czwórek przez $\mathcal{P}$. Wykażemy, że $|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}|$.

Dla dowolnej czwórki $(i, j, f, g) \in \mathcal{C}$ zdefiniujemy

$$\Phi(i, j, f, g) = (g(j), g(i), f \circ g^{-1}, g^{-1}).$$

Powyższy wzór określa funkcję z $\mathcal{C}$ w $\mathcal{C}$. Wprost z określenia Φ wynika, że

$$\Phi(\Phi(i, j, f, g)) = (i, j, f, g).$$

Z powyższej równości wynika w szczególności, że Φ jest bijekcją.

Niech $(i, j, f, g) \in \mathcal{L}$. Mamy $i < j$, $f(i) < f(j)$ i $g(j) < g(i)$. Funkcja g^{-1} jest $(g(j), g(i))$ -niezgodna, bo $g^{-1}(g(j)) = j > i = g^{-1}(g(i))$. Funkcja $f \circ g^{-1}$ również jest $(g(j), g(i))$ -niezgodna, bo

$$f \circ g^{-1}(g(j)) = f(g^{-1}(g(j))) = f(j) > f(i) = f(g^{-1}(g(i))) = f \circ g^{-1}(g(i)).$$

Stąd $\Phi(i, j, f, g) = (g(j), g(i), f \circ g^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{P}$. Wykazaliśmy zatem, że $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{P}|$.

Niech teraz $(i, j, f, g) \in \mathcal{P}$. Wówczas $i < j$, $f(j) < f(i)$ i $g(j) < g(i)$. Analogicznie jak w poprzednim akapicie dowodzimy, że funkcja g^{-1} jest $(g(j), g(i))$ -niezgodna. Funkcja $f \circ g^{-1}$ jest $(g(j), g(i))$ -zgodna, bo

$$f \circ g^{-1}(g(j)) = f(g^{-1}(g(j))) = f(j) < f(i) = f(g^{-1}(g(i))) = f \circ g^{-1}(g(i)).$$

Stąd $\Phi(i, j, f, g) = (g(j), g(i), f \circ g^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{L}$. Wykazaliśmy zatem, że $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{L}|$.

Z poprzednich dwóch akapitów otrzymujemy, że $|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}|$, co kończy dowód.

9. Dany jest taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$, że nie istnieje liczba całkowita $d > 1$ dzieląca każdą z różnic $a_{n+1} - a_n$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że suma pewnych N (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu jest równa sumie pewnych $N + 1$ (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Ciąg dany w zadaniu nie jest stały, gdyż wtedy każda różnica $a_{n+1} - a_n$ byłaby zerem, a więc dzieliłaby się przez 2. Niech k będzie najmniejszym indeksem, dla którego $a_k \neq a_{k+1}$. Zdefiniujmy ciąg $d_{k+1}, d_{k+2}, \dots$ wzorem

$$d_n = \text{NWD}(a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_{k+1}, \dots, a_n - a_{n-1}).$$

Jest to dobrze określony ciąg, bo $a_{k+1} - a_k \neq 0$. Jest on nierosnący, bo każdy wyraz jest dzielnikiem poprzedniego. W takim razie musi się stabilizować, tj. istnieje n_0 takie, że $d_n = d_{n_0}$ dla $n \geq n_0$ — nie istnieje bowiem nieskończony malejący ciąg liczb naturalnych. Gdyby $d_{n_0} > 1$, to otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkami zadania — liczba d_{n_0} dzieliłaby każdą z różnic $a_{n+1} - a_n$. Wobec tego $d_{n_0} = 1$.

Skorzystamy teraz z następującego ogólnego faktu, znanego w literaturze pod nazwą *lemat Bézouta*: jeśli $b_1, b_2, \dots, b_s$ są takimi liczbami całkowitymi, że $\text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s) = 1$, to istnieją liczby całkowite $c_1, c_2, \dots, c_s$ spełniające równość

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_s b_s = 1.$$

Z powyższego faktu wynika, że istnieją liczby całkowite $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_{n_0}$ spełniające równość

$$c_{k+1}(a_{k+1} - a_k) + c_{k+2}(a_{k+2} - a_{k+1}) + \dots + c_{n_0}(a_{n_0} - a_{n_0-1}) = 1.$$

Powyższą równość można przepisać w postaci

$$\sum_{j=k}^{n_0} c'_j a_j = 1,$$

gdzie $c'_k = -c_{k+1}$, $c'_j = c_j - c_{j+1}$ dla $j = k + 1, k + 2, \dots, n_0 - 1$ oraz $c'_{n_0} = c_{n_0}$. Zwróćmy uwagę na to, że $\sum_{j=k}^{n_0} c'_j = 0$. Niech A będzie zbiorem indeksów $j \in \{k, k+1, \dots, n_0\}$ spełniających $c'_j > 0$, a B — zbiorem indeksów $j \in \{k, k+1, \dots, n_0\}$, dla których $c'_j < 0$. Mamy wówczas

$$\sum_{j \in A} c'_j a_j = 1 + \sum_{j \in B} (-c'_j) a_j.$$

W powyższej równości wszystkie współczynniki stojące przy liczbach a_j są dodatnie. Mnożymy tę równość przez a_1 i otrzymujemy tezę zadania dla $N = \sum_{j \in A} a_1 c'_j = \sum_{j \in B} a_1 (-c'_j)$.

Uwaga. Lemat Bézouta można sformułować w następującej ogólniejszej wersji: jeśli $b_1, b_2, \dots, b_s$ są liczbami całkowitymi, przy czym nie wszystkie są równe zero, to istnieją liczby całkowite $c_1, c_2, \dots, c_s$ spełniające równość

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_s b_s = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s). \quad (\dagger)$$

Dla $s = 2$ jest to prosta konsekwencja algorytmu Euklidesa, o czym można przeczytać np. w miesięczniku *Delta* (5/2021, Kącik początkującego olimpijczyka 29, str. 25).

Dla $s \geq 3$ dowód przebiega przez indukcję. Bez straty ogólności można założyć, że wśród liczb $b_1, \dots, b_{s-1}$ jest co najmniej jedna niezerowa. Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieją takie liczby całkowite $c'_1, c'_2, \dots, c'_{s-1}$, że

$$c'_1 b_1 + c'_2 b_2 + \dots + c'_{s-1} b_{s-1} = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}). \quad (\ddagger)$$

Ponieważ $\text{NWD}(\text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}), b_s) = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s)$, więc istnieją takie liczby całkowite e, f , że

$$e \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}) + f b_s = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}, b_s).$$

Wykorzystując równość $(\ddagger)$ otrzymujemy

$$e(c'_1 b_1 + c'_2 b_2 + \dots + c'_{s-1} b_{s-1}) + f b_s = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s),$$

więc liczby $c_i = e c'_i$ dla $i = 1, 2, \dots, s-1$ i $c_s = f$ spełniają $(\dagger)$, czyli tezę indukcyjną.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Półproste AB i DC przecinają się w punkcie X . Półproste AD i BC przecinają się w punkcie Y . Punkty I i J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty BCX i CDY . Okręgi opisane na trójkątach BCX i CDY przecinają się ponownie w punkcie $Z \neq C$. Załóżmy, że $CX = CY$. Wykazać, że $ZI = ZJ$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Korzystając parokrotnie z faktu, że w czworokącie wpisanym w okrąg przeciwległe kąty sumują się do kąta półpełnego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sphericalangle CZX = 180^\circ - \sphericalangle XBC &= \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle ADC = \sphericalangle CDY = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle YZC. \end{aligned}$$

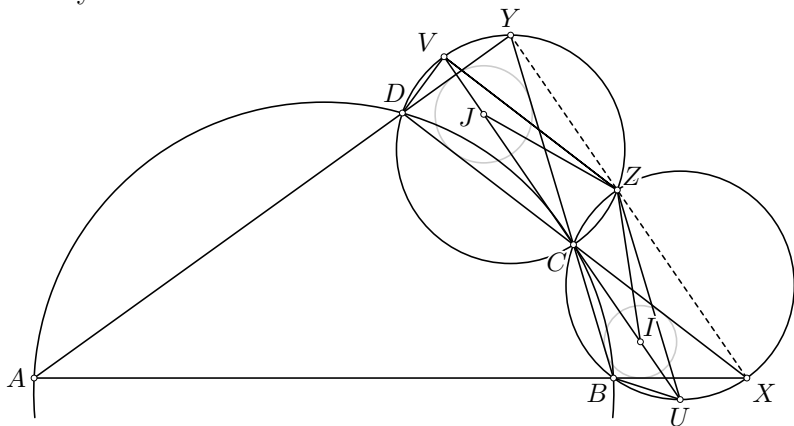
Zatem punkt Z leży na odcinku XY .

Oznaczmy okręgi opisane na trójkątach BCX i CDY odpowiednio przez o_1 i o_2 , a ich średnice odpowiednio przez d_1 i d_2 . Mamy

$$d_1 = \frac{CX}{\sin CZX} = \frac{CY}{\sin YZC} = d_2$$

— równość wynika z tego, że $CX = CY$ oraz $\sphericalangle CZX + \sphericalangle YZC = 180^\circ$.
 Okręgi o_1 i o_2 są zatem przystające.

Niech ℓ będzie dwusieczną kąta BCX . Prosta ℓ jest jednocześnie dwusieczną kąta YCD , gdyż jest to kąt wierzchołkowy do BCX . Na prostej ℓ leżą więc punkty I i J , gdyż są środkami okręgów wpisanych w trójkąty BCX i CDY . Oznaczmy drugi punkt przecięcia ℓ z o_1 przez $U \neq C$ oraz drugi punkt przecięcia ℓ z o_2 przez $V \neq C$. Kąty ZUC i CVZ są równe, bo są oparte na wspólnej cięciwie CZ w przystających okręgach o_1 i o_2 (i punkty U, V leżą po różnych stronach prostej CZ). Wobec tego trójkąt UVZ jest równoramienny i $ZU = ZV$.



Ponadto z lematu o trójlściu, który sformułujemy po zakończeniu rozwiązania, wynika że $IU = BU$ oraz $JV = DV$. Jednakże $BU = DV$, bo okręgi o_1 i o_2 są przystające i kąt wpisany oparty na cięciwie BU w o_1 jest równy kątowi wpisanemu opartemu na cięciwie DV w o_2 (kąt ten jest równy $\frac{1}{2} \sphericalangle BCX = \frac{1}{2} \sphericalangle YCD$). Łącząc otrzymane równości dochodzimy do wniosku, że $IU = JV$.

Z cechy przystawiania bok-kąt-bok wnioskujemy, że trójkąty IUZ i JVZ są przystające. Stąd wynika, że $ZI = ZJ$, co było do udowodnienia.

Sformułujemy teraz lemat o trójkącie.

Lemat o trójkąście. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M . Wówczas

$$MB = MC = MI.$$

Dowód lematu o trójlisciu można znaleźć w wielu źródłach, np. w gazetce Olimpiady Matematycznej Juniorów *Kwadrat* (nr 16, str. 2, Zadanie 7).

11. Dany jest ciąg liczb dodatnich $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniający warunek $a_k^2 \geq a_{k+1}a_{k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$. Załóżmy, że ciąg $b_0, b_1, \dots, b_n$ jest geometryczny, ma wyrazy dodatnie i spełnia równości

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^n ka_k = \sum_{k=0}^n kb_k.$$

Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n k^2 a_k \leq \sum_{k=0}^n k^2 b_k.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Oznaczmy $c_k = \frac{a_k}{b_k}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Ciąg $b_0, b_1, \dots, b_n$ jest geometryczny, więc spełnia równości $b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$. Zatem z założeń wynika, że ciąg $c_0, c_1, \dots, c_n$ spełnia $c_k^2 \geq c_{k-1}c_{k+1}$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n-1$. Jest to równoważne nierównościom

$$\frac{c_0}{c_1} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \dots \leq \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} \leq \frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Niech ℓ będzie takim indeksem, że $c_\ell = \max\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. (Jeśli jest kilka takich, za ℓ bierzemy dowolny z nich.) Wówczas

$$\frac{c_0}{c_1} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \dots \leq \frac{c_{\ell-1}}{c_\ell} \leq 1 \leq \frac{c_\ell}{c_{\ell+1}} \leq \dots \leq \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} \leq \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

skąd wynika, że

$$c_0 \leq \dots \leq c_{\ell-1} \leq c_\ell \geq c_{\ell+1} \geq \dots \geq c_n. \quad (\spadesuit)$$

Jeśli $c_\ell < 1$, to $c_k < 1$ dla każdego k , czyli $a_k < b_k$, co jest sprzeczne z założeniem $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k$. Zatem $c_\ell \geq 1$. Z nierówności $(\spadesuit)$ wynika, że istnieją $i \leq j$ o następującej własności: $c_k \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \leq k \leq j$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $(k-i)(k-j) \leq 0$. Wobec tego dla wszystkich $0 \leq k \leq n$ mamy

$$(k-i)(k-j)(c_k-1) \leq 0.$$

Równoważnie: $(k^2 - (i+j)k + ij)a_k \leq (k^2 - (i+j)k + ij)b_k$. Zsumowanie tej nierówności stronami dla $k = 0, 1, \dots, n$ prowadzi do

$$\sum_{k=0}^n k^2 a_k + (i+j) \sum_{k=0}^n k a_k + ij \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n k^2 b_k + (i+j) \sum_{k=0}^n k b_k + ij \sum_{k=0}^n b_k.$$

co jest równoważne tezie zadania, gdyż z założeń zadania mamy równości $\sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=0}^n k b_k$ i $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k$.

12. Przyjmujemy następujące oznaczenie: jeśli X i Y są podzbiorami zbioru liczb całkowitych, to $X+Y$ oznacza zbiór wszystkich liczb postaci $x+y$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$. Przyjmujemy też $X+Y+Z = (X+Y)+Z$.

Dane są niepuste skończone podzbiory A, B, C zbioru liczb całkowitych. Wykazać, że

$$2 \cdot |A+B+C| + 1 \geq |A+B| + |B+C| + |C+A|.$$

Autorka zadania: Marta Strzelecka

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej x i dowolnego podzbioru X zbioru liczb całkowitych zbiory X i $\{x\}+X$ mają tyle samo elementów. Można więc założyć, że $\min A = \min B = \min C = 0$ (zamiast zbiorów A, B, C rozważamy zbiory $\{-\min A\}+A, \{-\min B\}+B, \{-\min C\}+C$).

Oznaczmy $\max A = a$ i $\max B = b$. Rozważmy następujące cztery zbiory:

$$\begin{aligned} X_1 &= (\{a\} + B + C) \setminus \{a\} \\ X_2 &= (A + C) \cap (-\infty, a] \\ X_3 &= (A + \{b\} + C) \cap (a + b, \infty) \\ X_4 &= A + B \end{aligned}$$

Wszystkie te zbiory są zawarte w $A+B+C$. Zbiory X_1 i X_2 są rozłączne, bo pierwszy jest zawarty w przedziale (a, ∞) , a drugi w $(-\infty, a]$. Stąd wynika, że $|X_1| + |X_2| \leq |A+B+C|$. Podobnie, X_3 jest zawarty w $(a+b, \infty)$, a X_4 w $(-\infty, a+b]$, a więc X_3 i X_4 są rozłączne. Stąd $|X_3| + |X_4| \leq |A+B+C|$.

Mamy

$$\begin{aligned} |X_1| &= |\{a\} + B + C| - 1 = |B + C| - 1, \\ |X_2| + |X_3| &= |(A + C) \cap (-\infty, a]| + |(A + C) \cap (a, \infty)| = \\ &= |A + C|, \\ |X_4| &= |A + B|. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$2|A + B + C| \geqslant |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| = |B + C| - 1 + |A + C| + |A + B|,$$

co było do wykazania.