



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Piotrek bawi się kamykami. Początkowo ma pusty stos. W i -tym ruchu jeśli może zabrać ze stosu i kamyków, to to robi, a w przeciwnym razie — dokłada na stos i kamyków. W kolejnych ruchach liczby kamyków na stosie są więc równe: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, ...

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że po n ruchach na stosie Piotrka nie ma żadnych kamyków.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że po t ruchach stos jest pusty. Udowodnimy przez indukcję, że dla każdego $i = 0, 1, 2, \dots, t+1$ po wykonaniu $(t+2i+1)$ -szego ruchu stos zawiera $t+1-i$ kamyków. Dla $i = 0$ jest to prawda — po t ruchach stos był pusty, więc w $(t+1)$ -szym ruchu Piotrek musi dołożyć $t+1$ kamyków. W kroku indukcyjnym załóżmy, że po $t+2i+1$ ruchach, gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, t$, stos zawiera $t+1-i$ kamyków. Ponieważ $t+1-i < t+2i+2$, więc w $(t+2i+2)$ -gim ruchu Piotrek dokłada na stos $t+2i+2$ kamyków. Wówczas stos zawiera $t+1-i + (t+2i+2) = 2t+i+3$ kamyków. (Zauważmy przy okazji, że stos w tym momencie nie jest pusty.) Ponieważ $2t+i+3 \geq t+2i+3$, więc w $(t+2i+3)$ -cim ruchu Piotrek zdejmuję ze stosu $t+2i+3$ kamyki, a na stosie pozostaje $2t+i+3 - (t+2i+3) = t-i = t+1 - (i+1)$ kamyków. Dowód indukcyjny został zakończony.

Z powyższej dyskusji wynika, że jeśli stos był pusty po t ruchach, to następny moment, w którym stos staje się pusty występuje po $(3t+3)$ -cim ruchu.

numer ruchu	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	...	$3t$	$3t+1$	$3t+2$	$3t+3$
liczba kamyków	0	$t+1$	$2t+3$	t	$2t+4$	$t-1$	...	$3t+2$	1	$3t+3$	0

Oznaczmy przez a_k liczbę ruchów, po której stos staje się pusty po raz k -ty. Wówczas $a_1 = 3$ oraz $a_k = 3a_{k-1} + 3$ dla $k \geq 2$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
 a_k + \frac{3}{2} &= 3a_{k-1} + \frac{9}{2} = 3 \left(a_{k-1} + \frac{3}{2} \right) = 3^2 \left(a_{k-2} + \frac{3}{2} \right) = \dots = \\
 &= 3^{k-1} \left(a_1 + \frac{3}{2} \right) = 3^{k-1} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3^{k+1}}{2}.
 \end{aligned}$$

W takim razie $a_k = \frac{3^{k+1} - 3}{2}$ dla dowolnego $k \geq 1$.

Odpowiedź: Liczby postaci $\frac{3^{k+1} - 3}{2}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$

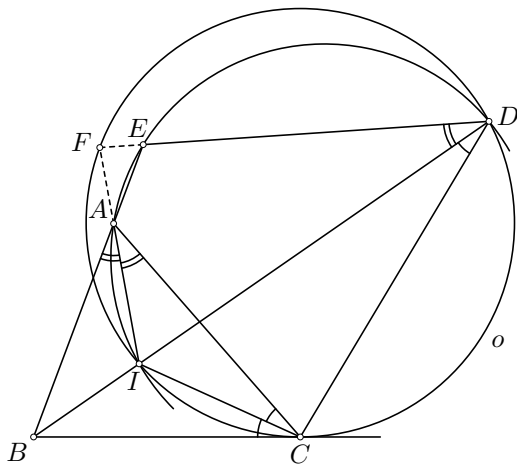
2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg o przechodzi przez punkt I i jest styczny do prostej BC w punkcie C . Półprosta BI przecina o w punkcie $D \neq I$. Półprosta BA przecina okrąg opisany na trójkącie ADI w punkcie $E \neq A$ leżącym poza odcinkiem AB . Wykazać, że proste DE i AI przecinają się w punkcie leżącym na o .

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Oznaczmy $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc AI i CI są dwusiecznymi kątów BAC i ACB .

Wykorzystując zależność między kątem wpisanym opartym na łuku i kątem dopisanym do tego samego łuku dostajemy $\sphericalangle IDC = \sphericalangle ICB = \frac{1}{2}\gamma$. Ponadto $\sphericalangle EDI = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\alpha$, gdyż czworokąt $AIDE$ jest wpisany w okrąg.

Niech F będzie punktem przecięcia prostych AI i DE . Należy udowodnić, że czworokąt $DCIF$ jest wpisany w okrąg. W tym celu wystarczy sprawdzić, że suma przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180° . Zauważmy, że $\sphericalangle CIF = \sphericalangle CIA = 180^\circ - \sphericalangle ACI - \sphericalangle IAC = 180^\circ - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\alpha$. Z drugiej strony $\sphericalangle FDC = \sphericalangle EDI + \sphericalangle IDC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$. Stąd $\sphericalangle CIF + \sphericalangle FDC = 180^\circ$, co kończy dowód.



3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Załóżmy, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ (przyjmujemy $x_{2n+2} = x_1$). Wykazać, że

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}).$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Określmy $x_{2n+1+i} = x_i$ dla dowolnego $i = 2, 3, \dots, 2n+1$. Mamy dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$

$$\begin{aligned} 2x_k &= (x_k + x_{k+1}) - (x_{k+1} + x_{k+2}) + (x_{k+2} + x_{k+3}) - (x_{k+3} + x_{k+4}) + \\ &+ \dots + (x_{2n+k-2} + x_{2n+k-1}) - (x_{2n+k-1} + x_{2n+k}) + (x_{2n+k} + x_{2n+1+k}). \end{aligned}$$

Z nierówności trójkąta oraz założenia, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2|x_k| &\leq |x_k + x_{k+1}| + |x_{k+1} + x_{k+2}| + \dots + |x_{2n+k} + x_{2n+1+k}| = \\ &= |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + \dots + |x_{2n} + x_{2n+1}| + |x_{2n+1} + x_1| = \\ &= (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2n} + x_{2n+1}) + (x_{2n+1} + x_1) = \\ &= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Wobec tego $|x_k| \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}$ dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Sumując tę nierówność dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ otrzymujemy tezę.

Sposób 2. Oznaczmy $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{2n+1}|\}$. Wówczas

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n+1) \cdot M$$

i do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że

$$M \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}. \quad (\clubsuit)$$

Udowodnimy, że $M = x_j$ dla pewnego j . Wprost z definicji M wynika, że $M = |x_k|$ dla pewnego k . Jeśli $x_k \geq 0$, to mamy postulowaną własność dla $j = k$. W przeciwnym razie $x_k < 0$ i $M = -x_k$. Z założeń zadania wiadomo, że $x_k + x_{k+1} \geq 0$, skąd otrzymujemy

$$M \geq |x_{k+1}| \geq x_{k+1} \geq -x_k = M \implies M = x_{k+1}$$

i znów mamy postulowaną własność dla $j = k+1$.

Bez ograniczenia ogólności rozumowania można założyć, że $j = 1$, tj. $M = x_1$ (można w razie potrzeby cyklicznie przesunąć indeksy — nie zmienia to ani założeń ani tezy zadania). Dodając do równości $x_1 = M$ nierówności $x_2 + x_3 \geq 0$, $x_4 + x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_{2n} + x_{2n+1} \geq 0$ otrzymujemy nierówność ($\clubsuit$), do której wcześniej sprowadziliśmy tezę zadania.

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a , b . Załóżmy, że liczba $a^2 + ab$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. Wykazać, że jeśli $b > 1$, to

$$b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$$

oraz wyznaczyć wszystkie pary liczb (a, b) spełniające warunki zadania, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Zapiszmy $a^2 + ab = a(a + b) = n(n + 1)$ dla pewnej liczby całkowitej n . Bez straty ogólności można założyć, że $n \geq 1$. Z założenia $b > 1$ wynika, że $n(n + 1) = a(a + b) > a(a + 1)$, a to oznacza, że $n > a$, bo funkcja $x \mapsto x(x + 1)$ jest rosnąca na zbiorze $(0, \infty)$.

Zapiszmy $n = a + m$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m . Wówczas

$$a(a + b) = (a + m)(a + m + 1)$$

$$a^2 + ab = a^2 + 2am + m^2 + a + m$$

$$ab - 2am - a = m^2 + m$$

$$a(b - 2m - 1) = m(m + 1)$$

Prawa strona ostatniej równości jest dodatnia, więc lewa strona też jest dodatnia. W konsekwencji $b - 2m - 1 > 0$, skąd $b \geq 2m + 2$. Ponadto a jest dzielnikiem liczby $m(m + 1)$, więc $a \leq m(m + 1)$. Wobec tego

$$1 + \sqrt{4a + 1} \leq 1 + \sqrt{4m(m + 1) + 1} = 1 + \sqrt{(2m + 1)^2} = 1 + (2m + 1) \leq b,$$

co było do udowodnienia.

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w szacowaniach $a \leq m(m + 1)$ i $b \geq 2m + 2$ zachodzi równość, tj. gdy $a = m(m + 1)$ i $b = 2(m + 1)$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m . Wyznaczone pary (a, b) w istocie spełniają warunki zadania, bo

$$a(a + b) = m(m + 1)(m(m + 1) + 2(m + 1)) = (m^2 + 2m)(m^2 + 2m + 1).$$

Odpowiedź: Pary (a, b) postaci $(m(m + 1), 2(m + 1))$, gdzie $m = 1, 2, 3, \dots$