



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 13 października 2025 r.

1. Piotrek bawi się kamykami. Początkowo ma pusty stos. W i -tym ruchu jeśli może zabrać ze stosu i kamyków, to to robi, a w przeciwnym razie — dokłada na stos i kamyków. W kolejnych ruchach liczby kamyków na stosie są więc równe: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, ...

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że po n ruchach na stosie Piotrka nie ma żadnych kamyków.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg o przechodzi przez punkt I i jest styczny do prostej BC w punkcie C . Półprosta BI przecina o w punkcie $D \neq I$. Półprosta BA przecina okrąg opisany na trójkącie ADI w punkcie $E \neq A$ leżącym poza odcinkiem AB . Wykazać, że proste DE i AI przecinają się w punkcie leżącym na o .

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Załóżmy, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ (przyjmujemy $x_{2n+2} = x_1$). Wykazać, że

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n + 1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}).$$

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b . Załóżmy, że liczba $a^2 + ab$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. Wykazać, że jeśli $b > 1$, to

$$b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$$

oraz wyznaczyć wszystkie pary liczb (a, b) spełniające warunki zadania, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

13 października 2025 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 12 listopada 2025 r.

5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, n spełniających równanie $3^k + n^3 + 6 = k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)$.

6. Dany jest ciąg 2025 liczb rzeczywistych, których suma wynosi 0, nie składający się z samych zer. Będziemy modyfikować ten ciąg zgodnie z następującą procedurą. Oznaczamy przez A liczbę dodatnich liczb w tym ciągu, przez B liczbę ujemnych liczb w tym ciągu, a przez S sumę wszystkich dodatnich liczb w tym ciągu. Od każdej dodatniej liczby w tym ciągu odejmujemy $\frac{S}{A}$, a do każdej ujemnej liczby w ciągu dodajemy $\frac{S}{B}$. Otrzymujemy w ten sposób nowy ciąg 2025 liczb rzeczywistych, do którego można zastosować opisaną wyżej procedurę ponownie (o ile otrzymany ciąg nie składa się z samych zer). Wykazać, że po wykonaniu tej procedury pewną skończoną liczbę razy otrzymamy ciąg, w którym wartości bezwzględne wszystkich wyrazów są mniejsze od $\frac{1}{2025}$.

7. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty E i F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Punkty K, L, M są odpowiednio środkami odcinków BD, BC, DC . Wykazać, że proste EK, AL, FM przecinają się w jednym punkcie.

8. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . *Permutacją* nazywamy każdą różnowartościową funkcję $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Dane są parami różne permutacje $f_1, \dots, f_N$ spełniające następujący warunek: dla dowolnych (niekoniecznie różnych) indeksów i, j istnieje takie k , że $f_i \circ f_j = f_k$, gdzie $\circ$ oznacza złożenie funkcji. Dla $1 \leq i < j \leq n$ niech $Z(i, j)$ oznacza liczbę tych indeksów ℓ , że $f_\ell(i) > f_\ell(j)$. Udowodnić, że

$$\frac{N}{2} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j)^2.$$

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

12 listopada 2025 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 1 grudnia 2025 r.

9. Dany jest taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$, że nie istnieje liczba całkowita $d > 1$ dzieląca każdą z różnic $a_{n+1} - a_n$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że suma pewnych N (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu jest równa sumie pewnych $N + 1$ (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Półproste AB i DC przecinają się w punkcie X . Półproste AD i BC przecinają się w punkcie Y . Punkty I i J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty BCX i CDY . Okręgi opisane na trójkątach BCX i CDY przecinają się ponownie w punkcie $Z \neq C$. Załóżmy, że $CX = CY$. Wykazać, że $ZI = ZJ$.

11. Dany jest ciąg liczb dodatnich $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniający warunek $a_k^2 \geq a_{k+1}a_{k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Załóżmy, że ciąg $b_0, b_1, \dots, b_n$ jest geometryczny, ma wyrazy dodatnie i spełnia równości

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=0}^n k b_k.$$

Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n k^2 a_k \leq \sum_{k=0}^n k^2 b_k.$$

12. Przyjmujemy następujące oznaczenie: jeśli X i Y są podzbiorami zbioru liczb całkowitych, to $X + Y$ oznacza zbiór wszystkich liczb postaci $x + y$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$. Przyjmujemy też $X + Y + Z = (X + Y) + Z$.

Dane są niepuste skończone podzbiory A, B, C zbioru liczb całkowitych. Wykazać, że

$$2 \cdot |A + B + C| + 1 \geq |A + B| + |B + C| + |C + A|.$$

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

1 grudnia 2025 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.