LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$ o następującej własności: istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz y, że

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = y$$

dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Ustalmy dowolną liczbę całkowitą $n \geqslant 2$. Określmy $x_1 = 1$, $x_k = (-1)^k$ dla $2 \leqslant k \leqslant n-1$ oraz $x_n = 1$ gdy $2 \nmid n$ i $x_n = 2$ gdy $2 \mid n$. Wówczas suma $x_1+x_2+\ldots+x_k$ jest równa 1 dla nieparzystych $1 \leqslant k \leqslant n-1$ oraz równa 2 dla parzystych $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Liczbę x_n dobrano tak, by $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3$, a więc tak, że suma $x_{k+1} + \ldots + x_n$ jest równa 2 dla nieparzystych $1 \leqslant k \leqslant n-1$ oraz równa 1 dla parzystych $1 \leqslant k \leqslant n$. Otrzymujemy zatem

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = 2$$

dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Dobierając $y = 2$ widzimy, że warunki zadania są spełnione.

Odpowiedź: Wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$.

Uwaga. Gdy $n = 2$, dla dowolnych $x_1 \neq 0 \neq x_2$ można dobrać $y = x_1x_2$. Jeśli $n \geqslant 3$, to wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla których istnieje y spełniający warunki zadania są postaci

$$(a, b, -b, b, -b, \ldots, -b, a+b)$$

dla n parzystych oraz

$$(a, b, -b, b, -b, \ldots, b, a)$$

dla n nieparzystych, gdzie a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że liczby $a, b, a+b$ są niezerowe. W obu przypadkach $y = a(a+b)$.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$ o następującej własności: liczba $2^k \cdot n - 1$ jest pierwsza dla każdego $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Liczby $n = 2$ i $n = 3$ spełniają warunki zadania, bowiem liczby

$$2^2 \cdot 2 - 1 = 7, \quad 2^2 \cdot 3 - 1 = 11, \quad 2^3 \cdot 3 - 1 = 23$$

są pierwsze. Poniżej wykażemy na dwa różne sposoby, że liczby $n \geqslant 4$ nie spełniają warunków zadania.

Sposób 1. Jeśli $n \geqslant 4$ jest liczbą parzystą, to $n - 1$ jest nieparzystą liczbą większą lub równą 3, a więc ma nieparzysty dzielnik pierwszy p. Wówczas $2 \leqslant p - 1 \leqslant n$. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że

$$2^{p-1} \cdot n - 1 \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

więc $2^{p-1} \cdot n - 1$ dzieli się przez p. Liczba ta jest większa od p, więc jest złożona. Stąd n nie spełnia warunków zadania

Jeśli $n \geqslant 5$ jest liczbą nieparzystą, to liczba $n - 2$ jest nieparzystą liczbą większą lub równą 3, a więc ma nieparzysty dzielnik pierwszy p. Jeśli $p = 3$, to liczba $2^3 \cdot n - 1 = 8(n-2) + 15$ dzieli się przez 3 i jest większa od 3, jest więc złożona. W przeciwnym razie $p \geqslant 5$, wtedy $2 \leqslant p - 2 \leqslant n$. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że

$$2^{p-2} \cdot n - 1 \equiv 2^{p-2} \cdot 2 - 1 \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

więc $2^{p-2} \cdot n - 1$ dzieli się przez p. Jest to liczba większa od p, więc jest złożona. Zatem n nie spełnia warunków zadania.

Sposób 2. Jeśli $n - 1$ ma nieparzysty dzielnik pierwszy, to analogicznie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że n nie spełnia warunków zadania. Liczba $n = 5$ nie spełnia warunków zadania, bo $2^3 \cdot 5 - 1 = 3 \cdot 13$. Do rozważenia pozostał przypadek, gdy $n = 2^k + 1$, gdzie $k \geqslant 3$. Oczywiście $k \leqslant n$. Mamy

$$2^{k-1}n - 1 = 2^{2k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^{2k-1} + 2^k - 2^{k-1} - 1 = (2^k - 1)(2^{k-1} + 1).$$

Powyższa liczba jest złożona, a zatem n nie spełnia warunków zadania.

Odpowiedź: $n \in \{2, 3\}$.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym kąt BPC jest prosty. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano trójkąty AQB i ARC, przy czym $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle PBC$, $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PAC$, $\sphericalangle RCA = \sphericalangle PCB$ oraz $\sphericalangle CAR = \sphericalangle BAP$. Wykazać, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Niech X będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z punktu B. Wówczas punkty P i X leżą na okręgu o średnicy BC. Zauważmy, że

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBP = 180^\circ - \sphericalangle PXC = \sphericalangle AXP.$$

Ponadto z założeń zadania mamy $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PAX$. Stąd trójkąty AQB i APX są podobne (cecha podobieństwa kąt-kąt). Zatem

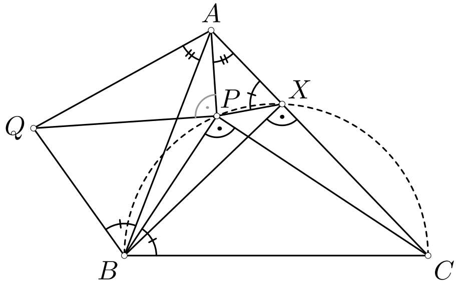
$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AX}.$$

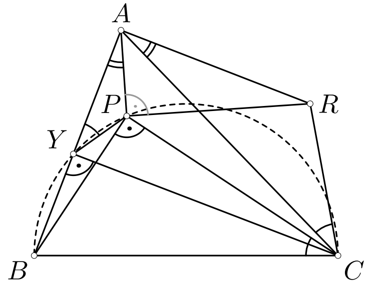
Ponadto

$$\sphericalangle QAP = \sphericalangle QAB + \sphericalangle BAP = \sphericalangle PAX + \sphericalangle BAP = \sphericalangle BAX.$$

Z powyższych równości wynika, że trójkąty QAP i BAX są podobne (cecha bok-kąt-bok). Stąd wynika, że $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AXB = 90^\circ$.

W pełni analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle RPA = 90^\circ$. Zatem punkty Q i R leżą na prostej prostopadłej do AP przechodzącej przez P.

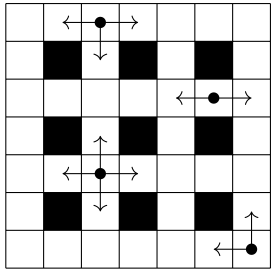




LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

4. Z planszy $(2n+1)\times(2n+1)$, gdzie $n \geqslant 2$ jest liczbą całkowitą, usunięto pola w parzystych wierszach i kolumnach, otrzymując labirynt (patrz rysunek). Po labiryncie chodzi mrówka, a jej pojedynczy krok polega na przejściu na jedno z sąsiednich pól. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą liczbę kroków, które musi wykonać mrówka, aby odwiedzić każde pole labiryntu. Pole startowe wybiera mrówka. Pole startowe i pole końcowe uznajemy za odwiedzone. Pola mogą być odwiedzane wielokrotnie.

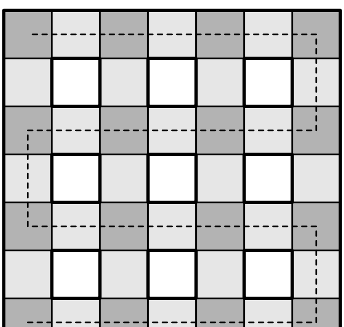


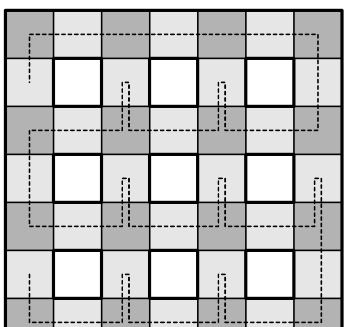
Labirynt dla $n = 3$ oraz możliwe kroki mrówki w czterech różnych jej pozycjach.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie: Każde pole labiryntu znajdujące się w nieparzystych wierszach i kolumnach pokolorujmy na czerwono, a pozostałe pola labiryntu — na zielono. Pól czerwonych jest $(n+1)^2$, a zielonych — $2n(n+1)$. Dowolne dwa sąsiadujące pola są różnych kolorów. Stąd wniosek, że aby odwiedzić wszystkie zielone pola potrzeba co najmniej $2(2n(n+1)-1) = 4n^2+4n-2$ kroków.

Wykażemy teraz, że szacowanie otrzymane powyżej jest optymalne. Rozważmy *wężyk* przedstawiony na lewym rysunku. Wężyk zaczyna się w lewym górnym polu, przechodzi na drugi koniec wiersza, schodzi dwa pola niżej, przechodzi na drugi koniec wiersza, i tak dalej.





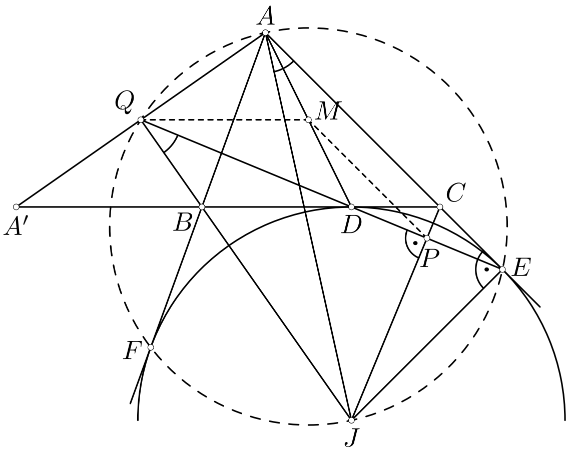
Opiszemy teraz przykładową optymalną trasę mrówki. Mrówka zaczyna spacer w polu znajdującym się w drugim wierszu i pierwszej kolumnie. Przechodzi do lewego górnego pola, a następnie idzie wzdłuż wężyka trzymając się cały czas następującej reguły: jeśli mrówka znajduje się w polu bezpośrednio pod nieodwiedzonym dotychczas zielonym polem, to wchodzi na to zielone pole. Jeśli było to ostatnie nieodwiedzone zielone pole, kończy spacer. W przeciwnym razie mrówka natychmiast wraca na poprzednie pole i kontynuuje spacer wzdłuż wężyka.

W ten sposób wszystkie pola z wężyka będą odwiedzane w tej samej kolejności, w jakiej znajdują się w wężyku. Bezpośrednio nad ostatnim polem wężyka znajduje się zielone pole (które jest różne od pola startowego, gdyż $n \geqslant 2$), a więc spacer mrówki nie zakończy się wcześniej niż dotrze na owo pole. W wężyku znajdują się wszystkie czerwone pola, więc wszystkie one zostaną odwiedzone. Wszystkie pola labiryntu poza wężykiem są zielone i znajdują się bezpośrednio nad jakimś czerwonym polem z wężyka, a więc one wszystkie też zostaną odwiedzone. Pozostaje zauważyć, że dla takiej trasy mrówka zaczyna i kończy wędrówkę na zielonym polu i każde zielone pole odwiedza dokładnie raz. Stąd mrówka wykona dokładnie $2(2n^2+2n-1)$ kroków.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg o środku J jest styczny do boku BC w punkcie D, do przedłużenia boku AC w punkcie E i do przedłużenia boku AB w punkcie F. Prosta DE przecina proste CJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q. Punkt M jest środkiem odcinka AD. Wykazać, że $PM = QM$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

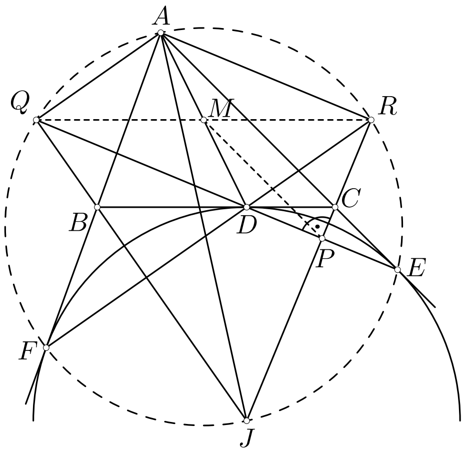
Rozwiązanie:
Sposób 1. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$. Proste BJ i CJ są dwusiecznymi kątów FBC i BCE, więc $\sphericalangle JBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$ i $\sphericalangle BCJ = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma)$. Stąd $\sphericalangle CJB = 180^\circ - \sphericalangle JBC - \sphericalangle BCJ = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle JQE = 90^\circ - \sphericalangle CJB = \frac{\alpha}{2}$. Prosta AJ jest dwusieczną kąta BAC, więc $\sphericalangle JAE = \frac{\alpha}{2}$. Zatem kąty JQE i JAE są równe. Przy tym punkty A i Q leżą po tej samej stronie prostej JE, więc punkty A, Q, J, E leżą na jednym okręgu. Ponieważ $\sphericalangle AEJ = 90^\circ$, więc również $\sphericalangle JQA = 90^\circ$.



Niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej BJ. Ponieważ BJ jest dwusieczną kąta między prostymi AB i BC, więc A' leży na BC. Oprócz tego Q jest środkiem odcinka AA', bo kąt JQA jest prosty. Korzystając z twierdzenia o linii środkowej mamy $PM = \frac{1}{2}EA$ i $QM = \frac{1}{2}A'D$. Ponadto $A'D = AF$, gdyż odcinki te są symetryczne względem BJ oraz $AF = AE$, gdyż są to odcinki styczne poprowadzone z punktu A do okręgu z zadania. Łącząc otrzymane równości odcinków dostajemy

$$QM = \frac{1}{2}A'D = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AE = PM.$$

Sposób 2. Niech R będzie punktem przecięcia prostych DF i CJ. Analogicznie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że Q i R leżą na okręgu o średnicy AJ. Proste AQ i DF są równoległe, bo obie są prostopadłe do BJ. Podobnie, AR i DE są równoległe, bo są prostopadłe do CJ. Wobec tego czworokąt $AQDR$ jest równoległobokiem. Punkt M, czyli środek odcinka AD, jest jednocześnie środkiem QR. Trójkąt PQR jest prostokątny, a M jest środkiem jego przeciwprostokątnej QR. Stąd $PM = QM$.



6. Dane są liczby całkowite $1 \leqslant k \leqslant n$. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełnia nierówności $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ oraz $0 \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ustawiono w kolejności niemalejącej, otrzymując ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i)^2 a_i a_j \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i)^2 b_i b_j.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Nierówność z tezy jest równoważna nierówności

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2 a_i a_j \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2 b_i b_j, \qquad (\heartsuit)$$

gdyż dla $i = j$ składniki sum zerują się, a składniki odpowiednich sum dla par i, j i j, i są takie same.

Udowodnimy przez indukcję, że nierówność $(\heartsuit)$ zachodzi dla dowolnych ciągów spełniających założenia zadania. Przypadek bazowy $n = 1$ jest oczywisty. Przejdźmy do kroku indukcyjnego.

Rozważmy ciąg a_1, a_2, $\ldots$, a_n spełniający założenia zadania. Wówczas $b_1 = a_1$ lub $b_1 = a_n$. Zastępując w razie potrzeby ciąg a_1, a_2, $\ldots$, a_n ciągiem a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 możemy założyć, że $b_1 = a_1$. Rzeczywiście, przy takiej zamianie obie strony dowodzonej nierówności nie zmienią się. Zauważmy, że ciąg $a'_1 = a_2$, $a'_2 = a_3$, $\ldots$, $a'_{n-1} = a_n$ spełnia założenie indukcyjne, a jego niemalejącą permutacją jest ciąg $b'_1 = b_2$, $b'_2 = b_3$, …, $b'_{n-1} = b_n$. Dostajemy

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (j-i)^2 a'_i a'_j \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (j-i)^2 b'_i b'_j,$$

czyli

$$\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)^2 a_i a_j \leqslant \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)^2 b_i b_j. \qquad (\clubsuit)$$

Wystarczy zatem udowodnić, że

$$\sum_{j=2}^{n} (j-1)^2 a_j \leqslant \sum_{j=2}^{n} (j-1)^2 b_j, \qquad (\spadesuit)$$

gdyż $a_1 \cdot (\spadesuit) + (\clubsuit) = (\heartsuit)$.

Zauważmy, że ciągi $1^2, 2^2, \ldots, (n-1)^2$ i $b_2, b_3, \ldots, b_n$ są niemalejące, a ciąg $a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest permutacją ciągu $b_2, b_3, \ldots, b_n$. Stosując nierówność między ciągami jednomonotonicznymi, dostajemy $(\spadesuit)$.

Uwaga. Nierówność między ciągami jednomonotonicznymi orzeka, że jeśli $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ i $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, to dla dowolnej permutacji $\sigma\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i+1}. \qquad (\diamondsuit)$$

Dowód tej nierówności wykorzystuje następujący lemat: jeżeli $a \geqslant b$ i $c \geqslant d$, to $ac + bd \geqslant ad + bc$. Lemat jest równoważny nierówności $(a-b)(c-d) \geqslant 0$, prawdziwej na mocy przyjętych założeń.

Jeśli $y_{\sigma(j)} > y_{\sigma(k)}$ dla pewnych $j < k$, to możemy zamienić miejscami $y_{\sigma(j)}$ i $y_{\sigma(k)}$, tym samym nie zmniejszając wartości sumy $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}$. Po wykonaniu skończenie wielu takich zamian dochodzimy do sytuacji, w której ciąg $y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$ jest posortowany niemalejąco. Stąd wynika lewa z nierówności $(\diamondsuit)$. Prawej nierówności dowodzi się analogicznie, sukcesywnie zamieniając liczby $y_{\sigma(j)}, y_{\sigma(k)}$, dla których $j < k$ i $y_{\sigma(j)} < y_{\sigma(k)}$, ostatecznie doprowadzając do sytuacji, w której ciąg $y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$ jest nierosnący.