LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Sposób 1. Z założeń wynika, że wyróżnik funkcji kwadratowej f jest ujemny, tj. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Stąd $ac > \frac{1}{4}b^2$. Zatem

$$\begin{aligned} a(2a + 3b + 6c) &= 2a^2 + 3ab + 6ac > 2a^2 + 3ab + \frac{3}{2}b^2 = \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}(a+b)^2 > 0. \end{aligned}$$

Sposób 2. Z założeń wynika, że współczynnik wiodący a ma taki sam znak jak wartość funkcji f dla dowolnego argumentu. W szczególności

$$\begin{aligned} ac &= af(0) > 0, \\ a\left(a + 2b + 4c\right) &= 4af\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ a(a + b + c) &= af(1) > 0. \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe nierówności otrzymujemy tezę.

Sposób 3. Podobnie jak w sposobie drugim wnioskujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $af(x) > 0$. W takim razie

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 af(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 a^2x^2 + abx + ac\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{a^2}{3}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 + acx\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{2} + ac. \end{aligned}$$

Mnożąc otrzymaną nierówność przez 6 otrzymujemy tezę.

2. Dany jest prostokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω o środku O. Prosta ℓ przechodzi przez O oraz przecina odcinki BC i AD odpowiednio w punktach E i F. Punkty K i L są punktami przecięcia ℓ i ω, przy czym punkty K, E, F, L leżą w takiej kolejności na prostej ℓ. Proste styczne do ω w punktach K i L przecinają prostą CD odpowiednio w punktach M i N. Udowodnić, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

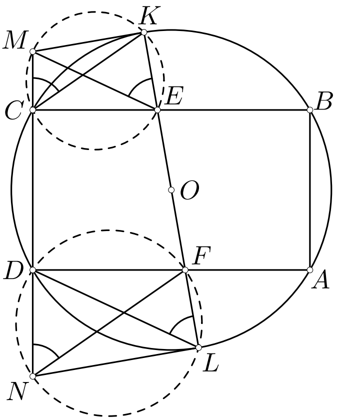
Autor zadania: Stanisław Majchrzak

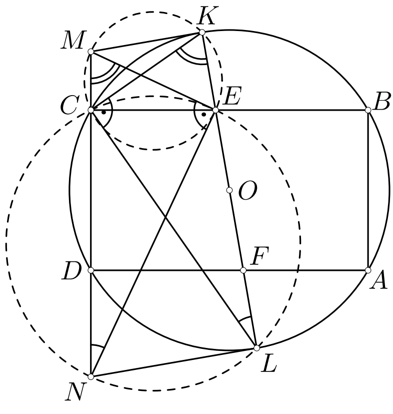
Rozwiązanie:

Sposób 1. Ponieważ proste KM i LN są styczne do ω, więc kąty OKM i OLN są proste. Również kąty ECM i NDF są proste, gdyż $ABCD$ jest prostokątem. Punkty C i K leżą więc na okręgu o średnicy EM, a punkty D i L na okręgu o średnicy FN. Oznaczmy $\sphericalangle FNM = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle FLD = \alpha$, bo kąty FLD i FND są oparte na tym samym łuku okręgu o średnicy FN. Kąty DCK i FLD są przeciwległymi kątami czworokąta wpisanego w okrąg, więc $\sphericalangle DCK = 180° - \alpha$. Kąt KCM jest przyległy do kąta DCK, więc $\sphericalangle KCM = \alpha$. Kąty KEM i KCM są oparte na tym samym łuku okręgu o średnicy EM, więc $\sphericalangle KEM = \alpha$. Kąt MEF jest przyległy do kąta KEM, więc $\sphericalangle MEF = 180° - \alpha$. Otrzymujemy

$$\sphericalangle FNM + \sphericalangle MEF = \alpha + (180° - \alpha) = 180°,$$

co oznacza, że czworokąt $EFNM$ można wpisać w okrąg.





Sposób 2. Punkty C i K leżą na okręgu o średnicy EM, bo kąty ECM i MKE są proste. Podobnie, punkty C i L leżą na okręgu o średnicy EN, bo kąty NCE i ELN są proste. Mamy $\sphericalangle CME = \sphericalangle CKE$ i $\sphericalangle ENC = \sphericalangle ELC$. Odcinek KL jest średnicą okręgu ω, więc trójkąt CKL jest prostokątny.

W konsekwencji

$$90^\circ = \sphericalangle CKE + \sphericalangle ELC = \sphericalangle CME + \sphericalangle ENC,$$

skąd wynika, że $\sphericalangle MEN = 90^\circ$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle MFN = 90^\circ$. Stąd wynika, że punkty E i F leżą na okręgu o średnicy MN, co daje tezę.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n będąca iloczynem 2024 różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych k spełniających równość

$$n + \mathrm{NWD}(n,k) = k.$$

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Udowodnimy, że liczba k spełnia równość $n + \mathrm{NWD}(n,k) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = n + d$ dla pewnego dzielnika d liczby n. Z jednej strony, jeśli $k = n + \mathrm{NWD}(n,k)$, to k jest postulowanej postaci, bowiem $\mathrm{NWD}(n,k)$ dzieli n. Z drugiej strony, dla dowolnej liczby k postaci $n + d$, gdzie d dzieli n, mamy

$$n + \mathrm{NWD}(n,k) = n + \mathrm{NWD}(n, n+d) = n + \mathrm{NWD}(n,d) = n + d = k.$$

To oznacza, że liczb k spełniających równość z zadania jest tyle samo ile jest dzielników liczby n. Ponieważ n jest iloczynem 2024 różnych liczb pierwszych, więc ma 2^{2024} dzielników.
Odpowiedź: 2^{2024}.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieją takie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera n kolejnych liczb całkowitych.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że n spełnia warunki zadania. Wtedy istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a, b, dla których

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a, a+1, a+2, \ldots, a+n-1\}$$

oraz

$$\{a_1+a_2, a_2+a_3, \ldots, a_{n-1}+a_n, a_n+a_1\} = \{b, b+1, b+2, \ldots, b+n-1\}$$

Wówczas

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n-1) = \frac{n(2a+n-1)}{2}$$

oraz

$$(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1) = \\ = b+(b+1)+\ldots+(b+n-1) = \frac{n(2b+n-1)}{2}.$$

Ale $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1) = 2(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, więc $\frac{1}{2}n(2b+n-1) = n(2a+n-1)$, skąd $n = 2b-4a+1$. Zatem n jest liczbą nieparzystą.

Ustalmy teraz dowolną liczbę nieparzystą $n = 2m+1 \geqslant 3$. Połóżmy $a_{2i+1} = i+1$ dla $i = 0,1,2,\ldots,m$ oraz $a_{2i} = m+i+1$ dla $i = 1,2,\ldots,m$, tj. liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2m+1}$ to kolejno

$$1,\ m+2,\ 2,\ m+3,\ 3,\ m+4,\ 4,\ \ldots,\ 2m+1,\ m+1.$$

Wówczas liczby $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, \ldots, a_{2m}+a_{2m+1}, a_{2m+1}+a_1$ to kolejno

$$m+3,\ m+4,\ m+5,\ \ldots,\ 3m+1,\ 3m+2,\ m+2.$$

Zatem

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{2m+1}\} = \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$$

oraz

$$\{a_1+a_2, a_2+a_3, \ldots, a_{2m}+a_{2m+1}, a_{2m+1}+a_1\} = \{m+2, m+3, \ldots, 3m+2\},$$

co świadczy o tym, że liczba n spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Liczby nieparzyste większe lub równe 3.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, n. Załóżmy, że liczby a i n są parzyste, liczba b jest nieparzysta oraz liczba $ab(a+b)^{n-1}$ jest podzielna przez a^n+b^n. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba a^n+b^n jest podzielna przez p^{n+1}.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Niech $a = dx$, $b = dy$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(a,b)$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wówczas $\mathrm{NWD}(x,y) = 1$. Skoro $a^n + b^n \mid ab(a+b)^{n-1}$, to $x^n + y^n \mid dxy(x+y)^{n-1}$. Zauważmy, że $\mathrm{NWD}(x^n+y^n, x) = \mathrm{NWD}(y^n, x) = 1$ i analogicznie $\mathrm{NWD}(x^n+y^n, y) = 1$.

Udowodnimy, że $\mathrm{NWD}(x^n+y^n, x+y) = 1$. Jeśli liczba pierwsza p dzieli x^n+y^n oraz $x+y$, to $p > 2$, gdyż liczba $x+y$ jest nieparzysta na mocy założeń zadania. Mamy $0 \equiv x^n + y^n \equiv x^n + (-x)^n \equiv 2x^n \pmod p$. Stąd $p \mid 2x^n$, więc $p \mid x$. Zatem $p \mid (x+y) - x = y$, co stoi w sprzeczności z $\mathrm{NWD}(x,y) = 1$. Tym samym udowodniliśmy, że liczby $x^n + y^n$, $x+y$ są względnie pierwsze.

Ponieważ $x^n + y^n \mid dxy(x+y)^{n-1}$ i liczba x^n+y^n jest względnie pierwsza z każdą z liczb x, y, $x+y$, więc $x^n+y^n \mid d$. Jeśli p jest liczbą pierwszą dzielącą x^n+y^n, to $p \mid d$, skąd liczba $a^n + b^n = d^n(x^n+y^n)$ dzieli się przez p^{n+1}.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n oraz podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Powiemy, że para liczb (x,y) jest *dobra*, jeśli $x < y$, $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ i istnieje dokładnie jeden indeks $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dla którego dokładnie jedna z liczb x, y należy do A_i. Wykazać, że istnieje co najwyżej n^2 dobrych par.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:
Sposób 1. Dla $x \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ niech b_x oznacza liczbę takich indeksów i, że $x \in A_i$. Zauważmy, że jeśli para (x,y) jest dobra, to $|b_x - b_y| = 1$. W szczególności liczby b_x, b_y są różnej parzystości.

Parę (x,y) nazwiemy *wspaniałą* jeśli $x < y$ i liczby b_x, b_y są różnej parzystości. Wykazaliśmy wyżej, że każda dobra para jest wspaniała. Wystarczy udowodnić, że liczba wspaniałych par jest nie większa od n^2. Niech c oznacza liczbę takich elementów $x \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, że $2 \mid b_x$. Wtedy istnieje dokładnie $2n - c$ elementów $x \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, dla których $2 \nmid b_x$. Liczba wspaniałych par jest zatem równa $c(2n-c)$. Należy wykazać, że $c(2n-c) \leqslant n^2$. Mamy $n^2 - c(2n-c) = (n-c)^2 \geqslant 0$, co kończy dowód.

Sposób 2. Dla dowolnego $i = 0, 1, \ldots, k$ niech B_i oznacza zbiór tych elementów $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, które należą do dokładnie i zbiorów pośród $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Zbiory $B_0, B_1, \ldots, B_k$ stanowią podział zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. To oznacza, że $|B_0| + |B_1| + \ldots + |B_k| = 2n$.

Jeśli para (x, y) jest dobra, to dla pewnego $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ mamy $x \in B_i$ i $y \in B_{i+1}$ lub vice versa: $x \in B_{i+1}$ i $y \in B_i$. W takim razie liczba dobrych par szacuje się z góry przez

$$T = \sum_{i=0}^{k-1} |B_i| \cdot |B_{i+1}|.$$

Załóżmy, że B_j jest najliczniejszym spośród zbiorów $B_0, B_1, \ldots, B_k$. Korzystając z szacowań $|B_i| \leqslant |B_j|$ dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant k$ oraz z nierówności między średnimi otrzymujemy

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=0}^{j-1} |B_i| \cdot |B_{i+1}| + \sum_{i=j}^{k-1} |B_i| \cdot |B_{i+1}| \leqslant \sum_{i=0}^{j-1} |B_i| \cdot |B_j| + \sum_{i=j}^{k-1} |B_j| \cdot |B_{i+1}| = \\
&= |B_j| \cdot \left(\sum_{i=0}^{j-1} |B_i| + \sum_{i=j+1}^{k} |B_i| \right) = |B_j| \cdot (2n - |B_j|) \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{|B_j| + (2n - |B_j|)}{2} \right)^2 = n^2,
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

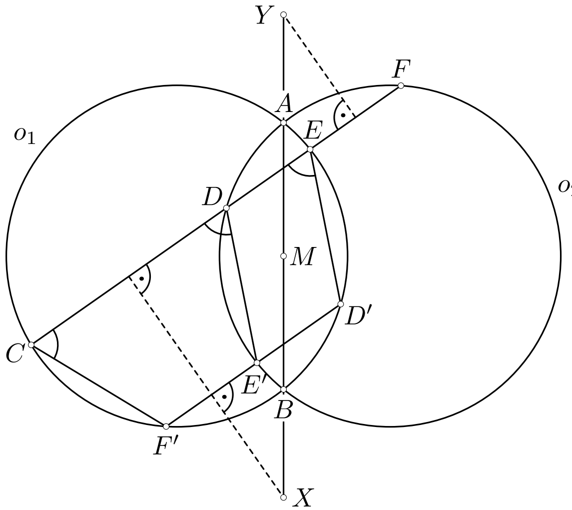
Uwaga. Może zdarzyć się, że dobrych par jest dokładnie n^2. Jest tak np. dla $k = 2$, $A_1 = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$.

7. Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach przecinają się w punktach A, B. Punkty C, D, E, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym C i E leżą na o_1, a D i F — na o_2. Symetralne odcinków CD i EF przecinają prostą AB odpowiednio w punktach X i Y. Dowieść, że $AX = BY$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:
Sposób 1. Niech M będzie środkiem odcinka AB. Jeśli prosta przechodząca przez punkty C, D, E, F przechodzi przez M, to M jest środkiem symetrii całego rysunku, a teza jest oczywista. Od teraz będziemy zakładać, że M nie leży na prostej $CDEF$. Okręgi o_1, o_2 są symetryczne względem M. Oznaczmy punkty symetryczne do D, E, F względem M odpowiednio przez D', E', F'.

Wówczas punkty D', E', F' leżą na prostej równoległej do prostej $CDEF$, punkty D', F' leżą na o_1, a E' na o_2. Czworokąt $DED'E'$ jest równoległobokiem, a czworokąt $CED'F'$ trapezem wpisanym w okrąg o_1, w szczególności jest to trapez równoramienny. W takim razie czworokąt $CDE'F'$ też jest trapezem równoramiennym, bo $CD \parallel E'F'$ i $\sphericalangle F'CD = \sphericalangle CED' = \sphericalangle CDE'$. Wynika stąd, że odcinki CD i $E'F'$ mają tę samą symetralną. W takim razie symetralna odcinka EF, będąca odbiciem symetralnej odcinka $E'F'$ względem punktu M, przecina prostą AB w punkcie symetrycznym do X względem M. To oznacza, że punkty X i Y są symetryczne względem M. Również punkty A i B są symetryczne względem M, a więc odcinki AX i BY są symetryczne względem M i w szczególności mają one równą długość.



Sposób 2. Oznaczmy punkt przecięcia prostej $CDEF$ z prostą AB przez G. Z twierdzenia o siecznych wynika, że $GC \cdot GE = GA \cdot GB = GD \cdot GF$, zatem

$$\frac{GF}{GC} = \frac{GE}{GD}.$$

Rozważmy jednokładność j o środku G i skali $-\frac{GF}{GC}$. Z powyższej równości wynika, że $j(C) = F$ i $j(D) = E$. Zatem ta jednokładność przekształca symetralną odcinka CD na symetralną odcinka EF. Przekształca też prostą AB na samą siebie. Stąd $j(X) = Y$. W szczególności $\sphericalangle DXC = \sphericalangle EYF$.

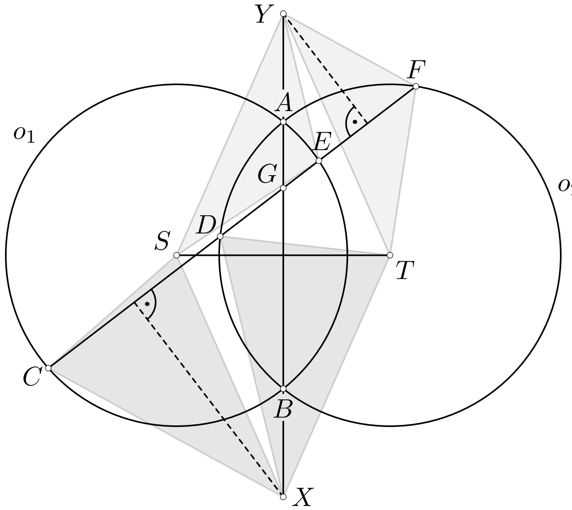
Oznaczmy środki okręgów o_1 i o_2 odpowiednio przez S i T. Z równości $XC = XD$, $XS = XT$ i $CS = DT$ wynika, że trójkąty XCS i XDT są przystające (bok-bok-bok). Analogicznie, $YE = YF$, $YS = YT$ i $ES = FT$, więc trójkąty YES i YFT są przystające. Z powyższych przystawań wynikają równości $\sphericalangle SXC = \sphericalangle TXD$ i $\sphericalangle SYE = \sphericalangle TYF$. Stąd

$$\sphericalangle DXC = \sphericalangle DXS + \sphericalangle SXC = \sphericalangle DXS + \sphericalangle TXD = \sphericalangle TXS$$

oraz

$$\sphericalangle EYF = \sphericalangle EYT + \sphericalangle TYF = \sphericalangle EYT + \sphericalangle SYE = \sphericalangle SYT.$$

Skoro $\sphericalangle DXC = \sphericalangle EYF$, to $\sphericalangle TXS = \sphericalangle SYT$. Stąd oraz z prostopadłości $ST \perp XY$ wynika, że punkty X i Y są symetryczne względem prostej ST. Punkty A i B też są symetryczne względem tej prostej, więc $AX = BY$.



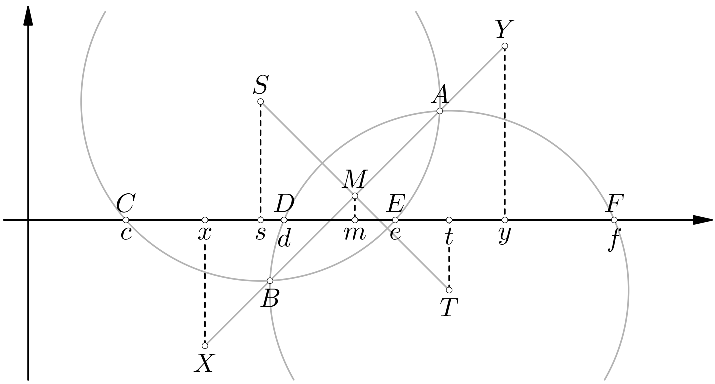
Sposób 3. Niech M będzie środkiem odcinka AB. Teza jest równoważna temu, że M jest środkiem odcinka XY. Niech S, T będą odpowiednio środkami okręgów o_1, o_2. Umieśćmy rysunek w układzie współrzędnych w taki sposób, by punkty C, D, E, F leżały na osi odciętych. Oznaczmy odcięte punktów C, D, E, F, M, X, Y, S, T odpowiednio przez c, d, e, f, m, x, y, s, t. Ponieważ punkty X, Y, S, T leżą odpowiednio na symetralnych odcinków CD, EF, CE, DF, więc

$$x = \frac{c+d}{2}, \quad y = \frac{e+f}{2}, \quad s = \frac{c+e}{2}, \quad t = \frac{d+f}{2}.$$

Ponieważ okręgi o_1, o_2 są przystające, więc M jest środkiem odcinka ST. W takim razie

$$m = \frac{s+t}{2} = \frac{\frac{c+e}{2} + \frac{d+f}{2}}{2} = \frac{\frac{c+d}{2} + \frac{e+f}{2}}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Prosta XY nie jest prostopadła do prostej CD (w przeciwnym razie symetralna odcinka CD byłaby równoległa do AB, więc proste te nie przecinałyby się). Na prostej XY istnieje zatem tylko jeden punkt o odciętej równej $\frac{x+y}{2}$ i jest to środek odcinka XY. Stąd wynika, że tym środkiem jest M, co kończy dowód.



8. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = x^2 + 2yz, \\ b^2 + 2ca = y^2 + 2zx, \\ c^2 + 2ab = z^2 + 2xy. \end{cases}$$

Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Sposób 1. Dodając stronami dane równości otrzymujemy

$$(a + b + c)^2 = (x + y + z)^2.$$

Oznaczmy $A = a^2 + 2bc$, $B = b^2 + 2ac$, $C = c^2 + 2ab$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= a^4 + 4a^2bc + 4b^2c^2 + b^4 + 4ab^2c + 4a^2c^2 + \\ &\quad + c^4 + 4abc^2 + 4a^2b^2 = \\ &= (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) + \\ &\quad + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2(ab + bc + ca)^2 \end{aligned}$$

i analogicznie

$$A^2+B^2+C^2=(x^2+y^2+z^2)^2+2(xy+yz+zx)^2.$$

Oznaczając $D=a^2+b^2+c^2$, $E=x^2+y^2+z^2$, $F=(a+b+c)^2=(x+y+z)^2$ dostajemy

$$A^2+B^2+C^2=D^2+2\left(\frac{F-D}{2}\right)^2=\frac{3}{2}D^2-DF+\frac{1}{2}F^2$$

i analogicznie

$$A^2+B^2+C^2=\frac{3}{2}E^2-EF+\frac{1}{2}F^2,$$

skąd po odjęciu stronami

$$0=\frac{3}{2}(D^2-E^2)+F(E-D)=\frac{1}{2}(D-E)(3D+3E-2F).$$

Jeśli $3D+3E-2F\neq 0$, to z powyższego dostajemy $D=E$, czyli tezę. W przeciwnym razie $3D+3E-2F=0$. Tymczasem

$$\begin{aligned}3D-F&=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

i analogicznie

$$3E-F=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0,$$

przy czym równości zachodzą wyłącznie dla $a=b=c$ i $x=y=z$. Warunek $3D+3E-2F=0$ oznacza zatem, że $a=b=c$ i $x=y=z$. Wtedy jednak

$$D=3a^2=a^2+2bc=x^2+2yz=3x^2=E,$$

co daje tezę.

Sposób 2. Dodając stronami wszystkie trzy równości dane w zadaniu otrzymujemy $(a+b+c)^2=(x+y+z)^2$. W razie potrzeby możemy zamienić liczby x,y,z na liczby $-x,-y,-z$ (przy takiej zamianie prawe strony danych trzech równań oraz prawa strona równości z tezy nie zmieniają się). Dlatego można założyć, że $a+b+c=x+y+z$.

Ponieważ $a+b+c=x+y+z$, więc

$$2(a+b+c)t+3t^2=2(x+y+z)t+3t^2, \tag{$\star$}$$

gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Dodając tę równość do równości danych w zadaniu otrzymujemy równoważnie

$$\begin{cases} (a+t)^2+2(b+t)(c+t)=(x+t)^2+2(y+t)(z+t),\\ (b+t)^2+2(c+t)(a+t)=(y+t)^2+2(z+t)(x+t),\\ (c+t)^2+2(a+t)(b+t)=(z+t)^2+2(x+t)(y+t). \end{cases}$$

Stąd szóstka (a,b,c,x,y,z) spełnia założenia zadania wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia je szóstka $(a+t,b+t,c+t,x+t,y+t,z+t)$. Z kolei dodając do tezy równość $(\star)$ otrzymujemy równoważną tezie równość

$$(a+t)^2+(b+t)^2+(c+t)^2=(x+t)^2+(y+t)^2+(z+t)^2.$$

Zatem aby wykazać tezę zadania dla szóstki (a,b,c,x,y,z) wystarczy udowodnić ją dla szóstki $(a+t,b+t,c+t,x+t,y+t,z+t)$ dla dogodnie dobranej liczby t. Wybierzmy $t=-\frac{1}{3}(a+b+c)$. Wtedy $(a+t)+(b+t)+(c+t)=0$ i $(x+t)+(y+t)+(z+t)=0$. Wystarczy więc wykazać tezę przy założeniu, że $a+b+c=x+y+z=0$.

Podstawiając $c=-a-b$ i $z=-x-y$ do pierwszych dwóch równań otrzymujemy

$$\begin{cases} a^2-2ab-2b^2=x^2-2xy-2y^2,\\ b^2-2ab-2a^2=y^2-2xy-2x^2. \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $3a^2-3b^2=3x^2-3y^2$, skąd $a^2-x^2=b^2-y^2$. Dodając dwukrotność drugiego równania do pierwszego otrzymujemy $-3a^2-6ab=-3x^2-6xy$, skąd $a^2-x^2=2(xy-ab)$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}(a^2-x^2)(xy+ab)&=2(xy-ab)(xy+ab)=2(x^2y^2-a^2b^2)\\ &=2(x^2y^2-a^2(a^2-x^2+y^2))=2(x^2-a^2)(a^2+y^2).\end{aligned}$$

Stąd

$$(x^2-a^2)(2a^2+2y^2-xy-ab)=0.$$

Drugi nawias jest równy

$$a^2+b^2+x^2+y^2-xy-ab=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+x^2+y^2+(a-b)^2+(x-y)^2\right),$$

co jest zerem wyłącznie dla $a=b=x=y=0$. Jeśli nie wszystkie liczby a,b,x,y są zerami, to pierwszy nawias musi się zerować, skąd $a^2=x^2$. Analogicznie dowodzimy, że $b^2=y^2$ i $c^2=z^2$, co daje tezę zadania.

Uwaga. Szóstka $(a,b,c,x,y,z) = (1,5,6,7,3,2)$ spełnia założenia zadania. Zatem z założeń **nie wynika**, że $a^2 = x^2$, $b^2 = y^2$ i $c^2 = z^2$.

Z drugiego sposobu rozwiązania wynika parametryzacja wszystkich szóstek (a,b,c,x,y,z) spełniających założenia zadania: są to szóstki postaci $(t+u,t+v,t+w,t+u,t+v,t+w)$, $(t+u,t+v,t+w,-t-u,-t-v,-t-w)$, $(t+u,t+v,t+w,t-u,t-v,t-w)$, $(t+u,t+v,t+w,-t+u,-t+v,-t+w)$, gdzie t,u,v,w są dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi równość $u+v+w=0$.

Traktując a,b,c jako zadane parametry, a x,y,z jako zmienne, możemy rozwiązać układ równań z zadania. Powyższa parametryzacja pozwala obliczyć, że jedynymi rozwiązaniami są trójki $(x,y,z) = (\pm a, \pm b, \pm c)$ oraz $(x,y,z) = \big(\pm\frac{1}{3}(-a+2b+2c), \pm\frac{1}{3}(2a-b+2c), \pm\frac{1}{3}(2a+2b-c)\big)$.

Niektórzy zawodnicy rozwiązali zadanie sprytnie wykorzystując liczby zespolone. Poniżej przedstawiamy rozwiązanie oparte na ich pomyśle.

Sposób 3. Oznaczmy $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Wówczas $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\omega - 1$ oraz $\omega^3 = 1$. Stąd

$$\begin{aligned}(a+\omega b+\omega^2 c)^2 &= a^2+\omega^2 b^2+\omega^4 c^2+2\omega ab+2\omega^2 ac+2\omega^3 bc = \\ &= (a^2+2bc)+\omega^2(b^2+2ca)+\omega(c^2+2ab) = \\ &= (x^2+2yz)+\omega^2(y^2+2zx)+\omega(z^2+2xy) = \\ &= (x+\omega y+\omega^2 z)^2.\end{aligned}$$

Zamieniając w razie potrzeby liczby x,y,z na $-x,-y,-z$, możemy przyjąć, że $a+\omega b+\omega^2 c = x+\omega y+\omega^2 z$. Wykorzystując związek $\omega^2 = -\omega-1$, zapisujemy otrzymaną równość w postaci $a-c-x+z = \omega(c-b+y-z)$. Jeśli $c-b+y-z \neq 0$, to lewa strona ostatniej równości jest rzeczywista, a prawa nie — sprzeczność. Stąd $c-b+y-z=0$, co pociąga za sobą $a-c-x+z=0$. Z tych dwóch związków wynika, że liczby $a-x, b-y, c-z$ są równe; oznaczmy ich wspólną wartość przez t.

Podobnie jak wcześniej wykazujemy, że $(a+b+c)^2 = (x+y+z)^2$. Teza wynika z następujących przekształceń:

$$\begin{aligned}0 &= (a+b+c)^2-(x+y+z)^2 = \\ &= (a+b+c+x+y+z)(a+b+c-x-y-z) = \\ &= (a+b+c+x+y+z)\cdot 3t = \\ &= 3((a+x)t+(b+y)t+(c+z)t) = \\ &= 3((a+x)(a-x)+(b+y)(b-y)+(c+z)(c-z)) = \\ &= 3(a^2-x^2+b^2-y^2+c^2-z^2).\end{aligned}$$

9. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ oraz liczba m jest parzysta. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $k < m$ i $\ell < n$, że

$$\left|\frac{k}{l} - \sqrt{2}\right| < \frac{m}{n} - \sqrt{2}.$$

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie: Wykażemy, że liczby $k = n$ i $\ell = \frac{m}{2}$ spełniają tezę zadania. Po pierwsze,

$$1 < \sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2,$$

więc $k = n < m$ i $\ell = \frac{m}{2} < n$. Mamy $\frac{k}{\ell} = \frac{2n}{m}$, więc należy wykazać nierówności

$$-\frac{m}{n} + \sqrt{2} < \frac{2n}{m} - \sqrt{2} < \frac{m}{n} - \sqrt{2}. \qquad (\star)$$

Z nierówności między średnimi wynika, że

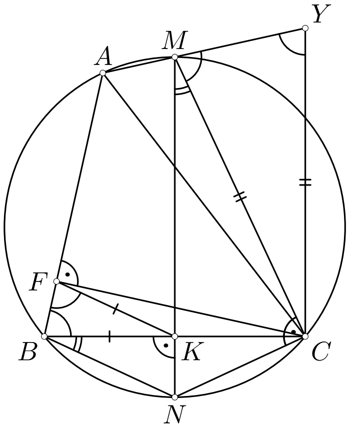
$$\frac{\frac{2n}{m} + \frac{m}{n}}{2} > \sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = \sqrt{2},$$

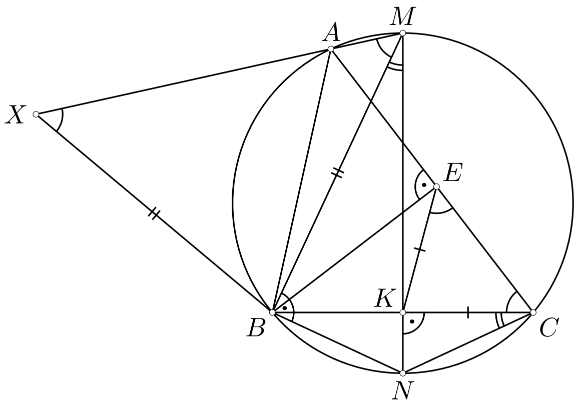
co jest równoważne pierwszej z nierówności $(\star)$. (Nierówność jest ostra, bo jej lewa strona jest wymierna, a prawa niewymierna.) Druga z nierówności $(\star)$ jest równoważna $2n^2 < m^2$, co jest prawdą na mocy założenia, że $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez Ω. Punkty M i N są środkami odpowiednio dłuższego łuku BC i krótszego łuku BC okręgu Ω. Punkty $X \neq M$ i $Y \neq M$ leżą na prostej AM i spełniają równości $BX = BM = CM = CY$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC, a punkt F rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Dowieść, że $\sphericalangle FNX = \sphericalangle YNE$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Niech K będzie środkiem boku BC. Wtedy K leży na MN. Ponieważ K jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego FBC, więc $KB = KF$. Kąt MCN jest prosty, bo MN jest średnicą okręgu Ω (prostopadłą do BC). Kąty oparte na tym samym łuku są równe, więc $\sphericalangle NBK = \sphericalangle NMC$. Z cechy podobieństwa kąt-kąt wynika, że trójkąty KBN i CMN są podobne. Mamy $\sphericalangle KBF = 180^\circ - \sphericalangle AMC = \sphericalangle CMY$. Trójkąty równoramienne KBF i CMY są podobne, bo mają takie same kąty między podstawą i ramieniem. Z otrzymanych podobieństw wynika podobieństwo czworokątów $KNBF$ i $CNMY$. W szczególności $\sphericalangle KNF = \sphericalangle CNY$.



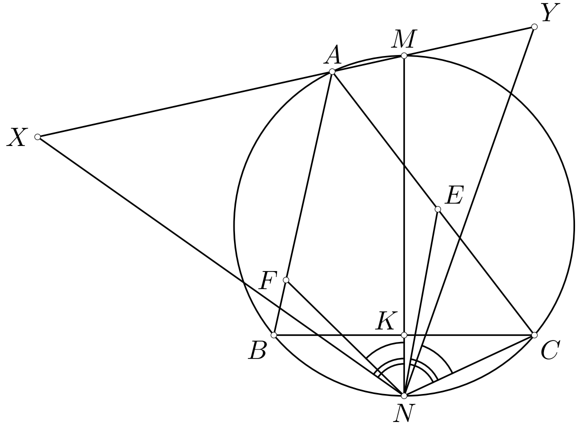


Analogicznie, $KE = KC$, gdyż K jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta EBC. Trójkąty KNC i BNM są podobne, bo $\sphericalangle NKC = 90^\circ = \sphericalangle NBM$ i $\sphericalangle KCN = \sphericalangle BMN$. Trójkąty równoramienne KCE i BMX są podobne, bo mają takie same kąty pomiędzy podstawą i ramieniem: $\sphericalangle XMB = \sphericalangle ECK$. Z otrzymanych podobieństw wynika podobieństwo czworokątów $KNCE$ i $BNMX$. Stąd $\sphericalangle CNE = \sphericalangle MNX$.

Z równości $\sphericalangle KNF = \sphericalangle CNY$ i $\sphericalangle MNX = \sphericalangle CNE$ wynika, że

$$\sphericalangle FNX = \sphericalangle MNX - \sphericalangle KNF = \sphericalangle CNE - \sphericalangle CNY = \sphericalangle YNE,$$

co było do wykazania.



11. Dana jest dodatnia liczba całkowita ℓ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy

$$c_n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\ldots(2k_\ell)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_\ell^{k_\ell}.$$

(W powyższym wzorze sumowanie przebiega po wszystkich ℓ-elementowych ciągach nieujemnych liczb całkowitych $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ o sumie równej n.)

Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{c_n} \leqslant \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$.

Autor zadania: Jacek Jakimiuk

Rozwiązanie: Dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \ldots$ rozważmy liczbę

$$b_n = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \left|\varepsilon_1\sqrt{a_1} + \varepsilon_2\sqrt{a_2} + \ldots + \varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}\right|^{2n}. \qquad (\star)$$

Korzystając ze wzoru

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_\ell)^m = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=m} \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_\ell!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_\ell^{k_\ell}$$

rozpisujemy równość $(\star)$:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \left|\varepsilon_1\sqrt{a_1} + \varepsilon_2\sqrt{a_2} + \ldots + \varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}\right|^{2n} = \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\ldots k_\ell!} \left(\varepsilon_1\sqrt{a_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}\right)^{k_\ell} = \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\ldots k_\ell!} \left(\sqrt{a_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\sqrt{a_\ell}\right)^{k_\ell} \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_\ell^{k_\ell} = \\ &= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\ldots k_\ell!} \left(\sqrt{a_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\sqrt{a_\ell}\right)^{k_\ell} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_\ell^{k_\ell}. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_\ell^{k_\ell} &= \left(\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1,1\}} \varepsilon_1^{k_1}\right) \left(\sum_{\varepsilon_2 \in \{-1,1\}} \varepsilon_2^{k_2}\right) \ldots \left(\sum_{\varepsilon_\ell \in \{-1,1\}} \varepsilon_\ell^{k_\ell}\right) = \\ &= \left((-1)^{k_1} + 1^{k_1}\right)\left((-1)^{k_2} + 1^{k_2}\right) \ldots \left((-1)^{k_\ell} + 1^{k_\ell}\right), \end{aligned}$$

co jest równe 0, gdy choć jedna z liczb $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ jest nieparzysta oraz równe 2^ℓ, gdy wszystkie liczby $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ są parzyste. Wobec tego

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\ldots k_\ell!} \left(\sqrt{a_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\sqrt{a_\ell}\right)^{k_\ell} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell\in\{-1,1\}} \varepsilon_1^{k_1}\ldots\varepsilon_\ell^{k_\ell} = \\
&= \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=2n \\ k_1,k_2,\ldots,k_\ell \text{ są parzyste}}} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\ldots k_\ell!} \left(\sqrt{a_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\sqrt{a_\ell}\right)^{k_\ell} \cdot 2^\ell = \\
&= 2^\ell \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\ldots(2k_\ell)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_\ell^{k_\ell} = \\
&= 2^\ell c_n.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że c_n jest średnią arytmetyczną $2n$-tych potęg 2^l liczb postaci $|\varepsilon_1\sqrt{a_1}+\varepsilon_2\sqrt{a_2}+\ldots+\varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}|$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}$. Teza zadania, po wzięciu pierwiastka kwadratowego, przyjmuje równoważną postać

$$\begin{aligned}
&\sqrt[2n]{\frac{\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell\in\{-1,1\}} |\varepsilon_1\sqrt{a_1}+\varepsilon_2\sqrt{a_2}+\ldots+\varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}|^{2n}}{2^\ell}} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sqrt[2n+2]{\frac{\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell\in\{-1,1\}} |\varepsilon_1\sqrt{a_1}+\varepsilon_2\sqrt{a_2}+\ldots+\varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}|^{2n+2}}{2^\ell}},
\end{aligned}$$

co jest bezpośrednim wnioskiem z nierówności między średnimi potęgowymi stopnia $2n$ i $2n + 2$.

12. Powiemy, że podzbiór A zbioru nieujemnych liczb całkowitych jest *fajny*, jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant k$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a > b$ ze zbioru A spełniająca równość $n = a + b$. Rozstrzygnąć, czy istnieje fajny zbiór.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Załóżmy, że zbiór A jest fajny. Zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych n, a, b, takich, że $a, b \in A$ równość $n = a+b$ jest równoważna równości $n - 2\min(A) = (a - \min(A)) + (b - \min(A))$. To oznacza, że zbiór $\{a - \min(A) \colon a \in A\}$ jest fajny. Innymi słowy, można bez straty ogólności założyć, że $0 \in A$.

Zbiór A musi być nieskończony — w przeciwnym razie żadna liczba większa od $2 \cdot \max(A)$ nie miałaby przedstawienia w postaci $a + b$, gdzie $a, b \in A$.

Niech $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ będzie rosnącą numeracją wszystkich elementów zbioru A. Wówczas oczywiście $a_n \geqslant n$ dla dowolnego n.

Ustalmy taką liczbę całkowitą $k \geqslant 100$, że dla dowolnego $n \geqslant k$ istnieje dokładnie jedna para $0 \leqslant i < j$ spełniająca równość $n = a_i + a_j$. Oznaczmy $S_n = \{a_i + a_j \colon 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Zauważmy, że zbiór S_n ma co najwyżej $\binom{n+1}{2}$ elementów.

Lemat 1. $a_n = \min(\{k, k+1, k+2, \ldots\} \setminus S_{n-1})$ *dla dowolnego* $n \geqslant k$. *Innymi słowy, dla dowolnego* $n \geqslant k$ *liczba* a_n *jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą* k*, która nie należy do* S_{n-1}*.*

Dowód Lematu 1. Zauważmy, że $a_n + a_0$ jest reprezentacją liczby a_n w postaci $a_i + a_j$ dla pewnych $0 \leqslant i < j$. Ponieważ $a_n \geqslant n \geqslant k$, więc takie przedstawienie jest jedyne. W konsekwencji nie istnieje para liczb $0 \leqslant i < j \leqslant n-1$ spełniająca $a_n = a_i + a_j$. To dowodzi, że $a_n \notin S_{n-1}$. Z drugiej strony, jeśli $m = a_i + a_j \geqslant k$ dla pewnych $0 \leqslant i < j$ i $m \notin S_{n-1}$, to $j \geqslant n$, więc $m = a_i + a_j \geqslant a_j \geqslant a_n$, co dowodzi, że a_n jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą k spoza zbioru S_{n-1}.

Lemat 2. $a_n \leqslant a_k + \binom{n}{2}$ *dla każdego* $n \geqslant k$.

Dowód Lematu 2. Ponieważ zbiór S_{n-1} ma $|S_{n-1}|$ elementów, wśród liczb całkowitych z przedziału $[a_k, a_k + |S_{n-1}|]$ istnieje taka, która nie należy do S_{n-1}. Nazwijmy tę liczbę m. Z Lematu 1. wynika, że

$$a_n \leqslant m \leqslant a_k + |S_{n-1}| \leqslant a_k + \binom{n}{2}.$$

Lemat 3. $a_n \geqslant \binom{n-k}{2}$ *dla każdego* $n > k$.

Dowód Lematu 3. Zdefiniujmy zbiór $R_n = \{a_j - a_i \colon k \leqslant i < j \leqslant n\}$. Zauważmy, że wszystkie elementy tego zbioru są dodatnie i mniejsze od a_n. Stąd wynika, że $|R_n| \leqslant a_n$. Wystarczy więc udowodnić, że $|R_n| \geqslant \binom{n-k}{2}$.

Równość $a_j - a_i = a_{j'} - a_{i'}$ jest równoważna równości $a_j + a_{i'} = a_{j'} + a_i$, która dla $k \leqslant i < j \leqslant n$, $k \leqslant i' < j' \leqslant n$ może być prawdziwa tylko gdy $(i, j) = (i', j')$ lub $i = j'$ lub $i' = j$ (w przeciwnym razie istniałaby liczba większa od k w postaci sumy dwóch różnych elementów zbioru A). Dalej, dla ustalonego $k \leqslant i < n$ istnieje co najwyżej jedna para liczb j, i' spełniająca $k \leqslant i' < i < j \leqslant n$ i $a_j - a_i = a_i - a_{i'}$ (równość ta jest równoważna $2a_i = a_j + a_{i'}$). Z powyższej dyskusji wynika, że wśród liczb $a_j - a_i$, gdzie $k \leqslant i < j \leqslant n$, co najwyżej $n - k$ liczb pojawia się dwukrotnie, a wszystkie pozostałe — jednokrotnie. Zatem

$$|R_n| \geqslant \binom{n-k+1}{2} - (n-k) = \binom{n-k}{2}.$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Wybierzmy $n = 4m$, gdzie $m > k$ jest tak dużą liczbą całkowitą, że szacowania w dalszej części rozwiązania oznaczone symbolami $(\star)$ i $(\star\star)$ są prawdziwe. Istnienie takiej liczby m wynika z tego, że jeśli współczynnik wiodący funkcji kwadratowej f jest większy od współczynnika wiodącego funkcji kwadratowej g, to $f(m) > g(m)$ dla dostatecznie dużych m.

Zauważmy, że dla dowolnych $4m-1 \geqslant j > i \geqslant 3m$ mamy, na mocy Lematu 3., wyboru liczby m, oraz Lematu 2.

$$a_i + a_j \geqslant \binom{i-k}{2} + \binom{j-k}{2} > 2 \cdot \binom{3m-k}{2} \overset{(\star)}{>} a_k + \binom{4m}{2} =$$
$$= a_k + \binom{n}{2} \geqslant a_n.$$

Istnieje zatem $\binom{m}{2}$ elementów zbioru S_{n-1} większych od a_n. To pozwala poprawić szacowanie uzyskane w Lemacie 2. W rzeczy samej, niech S'_{n-1} będzie zbiorem S_{n-1} bez jego $\binom{m}{2}$ największych elementów. Wówczas

$$|S'_{n-1}| = |S_{n-1}| - \binom{m}{2} \quad \text{oraz} \quad a_n = \min(\{k, k+1, k+2, \ldots\} \setminus S'_{n-1}).$$

Istnieje taka liczba całkowita t, że $a_k \leqslant t \leqslant a_k + |S'_{n-1}|$ oraz $t \notin S'_{n-1}$. Wtedy

$$a_n \leqslant t \leqslant a_k + |S'_{n-1}| = a_k + |S_{n-1}| - \binom{m}{2} \leqslant a_k + \binom{n}{2} - \binom{m}{2} =$$
$$= a_k + \binom{4m}{2} - \binom{m}{2} \overset{(\star\star)}{<} \binom{4m-k}{2} = \binom{n-k}{2},$$

co daje sprzeczność z Lematem 3.

Odpowiedź: Nie.