LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Sposób 1. Z założeń wynika, że wyróżnik funkcji kwadratowej f jest ujemny, tj. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Stąd $ac > \frac{1}{4}b^2$. Zatem

$$a(2a + 3b + 6c) = 2a^2 + 3ab + 6ac > 2a^2 + 3ab + \frac{3}{2}b^2 =$$
$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}(a+b)^2 > 0.$$

Sposób 2. Z założeń wynika, że współczynnik wiodący a ma taki sam znak jak wartość funkcji f dla dowolnego argumentu. W szczególności

$$ac = af(0) > 0,$$
$$a\,(a + 2b + 4c) = 4af\left(\frac{1}{2}\right) > 0,$$
$$a(a + b + c) = af(1) > 0.$$

Dodając stronami powyższe nierówności otrzymujemy tezę.

Sposób 3. Podobnie jak w sposobie drugim wnioskujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $af(x) > 0$. W takim razie

$$0 < \int_0^1 af(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a^2x^2 + abx + ac\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{a^2}{3}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 + acx\Big|_{x=0}^{1} = \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{2} + ac.$$

Mnożąc otrzymaną nierówność przez 6 otrzymujemy tezę.

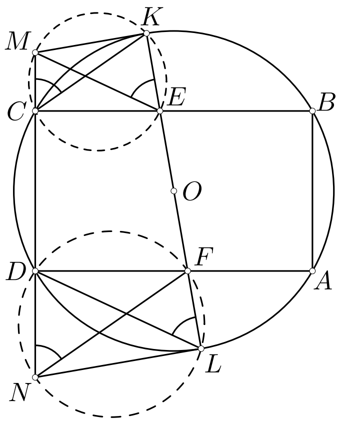
2. Dany jest prostokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω o środku O. Prosta ℓ przechodzi przez O oraz przecina odcinki BC i AD odpowiednio w punktach E i F. Punkty K i L są punktami przecięcia ℓ i ω, przy czym punkty K, E, F, L leżą w takiej kolejności na prostej ℓ. Proste styczne do ω w punktach K i L przecinają prostą CD odpowiednio w punktach M i N. Udowodnić, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

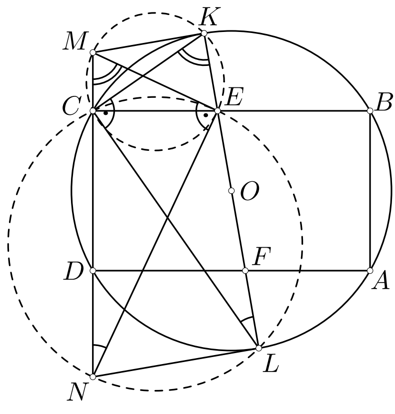
Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie:
Sposób 1. Ponieważ proste KM i LN są styczne do ω, więc kąty OKM i OLN są proste. Również kąty ECM i NDF są proste, gdyż $ABCD$ jest prostokątem. Punkty C i K leżą więc na okręgu o średnicy EM, a punkty D i L na okręgu o średnicy FN. Oznaczmy $\sphericalangle FNM = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle FLD = \alpha$, bo kąty FLD i FND są oparte na tym samym łuku okręgu o średnicy FN. Kąty DCK i FLD są przeciwległymi kątami czworokąta wpisanego w okrąg, więc $\sphericalangle DCK = 180^\circ - \alpha$. Kąt KCM jest przyległy do kąta DCK, więc $\sphericalangle KCM = \alpha$. Kąty KEM i KCM są oparte na tym samym łuku okręgu o średnicy EM, więc $\sphericalangle KEM = \alpha$. Kąt MEF jest przyległy do kąta KEM, więc $\sphericalangle MEF = 180^\circ - \alpha$. Otrzymujemy

$$\sphericalangle FNM + \sphericalangle MEF = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ,$$

co oznacza, że czworokąt $EFNM$ można wpisać w okrąg.





Sposób 2. Punkty C i K leżą na okręgu o średnicy EM, bo kąty ECM i MKE są proste. Podobnie, punkty C i L leżą na okręgu o średnicy EN, bo kąty NCE i ELN są proste. Mamy $\sphericalangle CME = \sphericalangle CKE$ i $\sphericalangle ENC = \sphericalangle ELC$. Odcinek KL jest średnicą okręgu ω, więc trójkąt CKL jest prostokątny.

W konsekwencji

$$90^\circ = \sphericalangle CKE + \sphericalangle ELC = \sphericalangle CME + \sphericalangle ENC,$$

skąd wynika, że $\sphericalangle MEN = 90^\circ$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle MFN = 90^\circ$. Stąd wynika, że punkty E i F leżą na okręgu o średnicy MN, co daje tezę.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n będąca iloczynem 2024 różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych k spełniających równość

$$n + \mathrm{NWD}(n, k) = k.$$

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Udowodnimy, że liczba k spełnia równość $n + \mathrm{NWD}(n, k) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = n+d$ dla pewnego dzielnika d liczby n. Z jednej strony, jeśli $k = n + \mathrm{NWD}(n, k)$, to k jest postulowanej postaci, bowiem $\mathrm{NWD}(n, k)$ dzieli n. Z drugiej strony, dla dowolnej liczby k postaci $n + d$, gdzie d dzieli n, mamy

$$n + \mathrm{NWD}(n, k) = n + \mathrm{NWD}(n, n + d) = n + \mathrm{NWD}(n, d) = n + d = k.$$

To oznacza, że liczb k spełniających równość z zadania jest tyle samo ile jest dzielników liczby n. Ponieważ n jest iloczynem 2024 różnych liczb pierwszych, więc ma 2^{2024} dzielników.
Odpowiedź: 2^{2024}.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieją takie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera n kolejnych liczb całkowitych.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że n spełnia warunki zadania. Wtedy istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a, b, dla których

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a, a + 1, a + 2, \ldots, a + n - 1\}$$

oraz

$$\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\} = \{b, b+1, b+2, \ldots, b+n-1\}$$

Wówczas

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+n-1) = \frac{n(2a+n-1)}{2}$$

oraz

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1) = \\ = b + (b+1) + \ldots + (b+n-1) = \frac{n(2b+n-1)}{2}.$$

Ale $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1) = 2(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, więc $\frac{1}{2}n(2b+n-1) = n(2a+n-1)$, skąd $n = 2b-4a+1$. Zatem n jest liczbą nieparzystą.

Ustalmy teraz dowolną liczbę nieparzystą $n = 2m+1 \geqslant 3$. Połóżmy $a_{2i+1} = i+1$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ oraz $a_{2i} = m+i+1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Wówczas

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{2m+1}\} = \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$$

oraz

$$\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{2m} + a_{2m+1}, a_{2m+1} + a_1\} = \{m+2, m+3, \ldots, 3m+2\},$$

co świadczy o tym, że liczba n spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Liczby nieparzyste większe lub równe 3.