LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 14 października 2024 r.

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

2. Dany jest prostokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω o środku O. Prosta ℓ przechodzi przez O oraz przecina odcinki BC i AD odpowiednio w punktach E i F. Punkty K i L są punktami przecięcia ℓ i ω, przy czym punkty K, E, F, L leżą w takiej kolejności na prostej ℓ. Proste styczne do ω w punktach K i L przecinają prostą CD odpowiednio w punktach M i N. Udowodnić, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n będąca iloczynem 2024 parami różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych k spełniających równość

$$n + \mathrm{NWD}(n, k) = k.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieją takie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera n kolejnych liczb całkowitych.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

14 października 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 12 listopada 2024 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, n. Załóżmy, że liczby a i n są parzyste, liczba b jest nieparzysta oraz liczba $ab(a+b)^{n-1}$ jest podzielna przez a^n+b^n. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba a^n+b^n jest podzielna przez p^{n+1}.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n oraz podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Powiemy, że para liczb (x, y) jest *dobra*, jeśli $x < y$, $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ i istnieje dokładnie jeden indeks $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dla którego dokładnie jedna z liczb x, y należy do A_i. Wykazać, że istnieje co najwyżej n^2 dobrych par.

7. Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach przecinają się w punktach A, B. Punkty C, D, E, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym C i E leżą na o_1, a D i F — na o_2. Symetralne odcinków CD i EF przecinają prostą AB odpowiednio w punktach X i Y. Dowieść, że $AX = BY$.

8. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = x^2 + 2yz, \\ b^2 + 2ca = y^2 + 2zx, \\ c^2 + 2ab = z^2 + 2xy. \end{cases}$$

Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

12 listopada 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 2 grudnia 2024 r.

9. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ oraz liczba m jest parzysta. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $k < m$ i $\ell < n$, że

$$\left|\frac{k}{l} - \sqrt{2}\right| < \frac{m}{n} - \sqrt{2}.$$

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez Ω. Punkty M i N są środkami odpowiednio dłuższego łuku BC i krótszego łuku BC okręgu Ω. Punkty $X \neq M$ i $Y \neq M$ leżą na prostej AM i spełniają równości $BX = BM = CM = CY$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC, a punkt F rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Dowieść, że $\sphericalangle FNX = \sphericalangle YNE$.

11. Dana jest dodatnia liczba całkowita ℓ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy

$$c_n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_\ell=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\ldots(2k_\ell)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_\ell^{k_\ell}.$$

(W powyższym wzorze sumowanie przebiega po wszystkich ℓ-elementowych ciągach nieujemnych liczb całkowitych $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ o sumie równej n.)

Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{c_n} \leqslant \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$.

12. Powiemy, że podzbiór A zbioru nieujemnych liczb całkowitych jest *fajny*, jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant k$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a > b$ ze zbioru A spełniająca równość $n = a + b$. Rozstrzygnąć, czy istnieje fajny zbiór.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

2 grudnia 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.