LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 14 października 2024 r.

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

2. Dany jest prostokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω o środku O. Prosta ℓ przechodzi przez O oraz przecina odcinki BC i AD odpowiednio w punktach E i F. Punkty K i L są punktami przecięcia ℓ i ω, przy czym punkty K, E, F, L leżą w takiej kolejności na prostej ℓ. Proste styczne do ω w punktach K i L przecinają prostą CD odpowiednio w punktach M i N. Udowodnić, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n będąca iloczynem 2024 parami różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych k spełniających równość

$$n + \mathrm{NWD}(n, k) = k.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieją takie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera n kolejnych liczb całkowitych.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

14 października 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 12 listopada 2024 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, n. Załóżmy, że liczby a i n są parzyste, liczba b jest nieparzysta oraz liczba $ab(a+b)^{n-1}$ jest podzielna przez a^n+b^n. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba a^n+b^n jest podzielna przez p^{n+1}.

6. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n oraz podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Powiemy, że para liczb (x, y) jest *dobra*, jeśli $x < y$, $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ i istnieje dokładnie jeden indeks $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dla którego dokładnie jedna z liczb x, y należy do A_i. Wykazać, że istnieje co najwyżej n^2 dobrych par.

7. Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach przecinają się w punktach A, B. Punkty C, D, E, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym C i E leżą na o_1, a D i F — na o_2. Symetralne odcinków CD i EF przecinają prostą AB odpowiednio w punktach X i Y. Dowieść, że $AX = BY$.

8. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = x^2 + 2yz, \\ b^2 + 2ca = y^2 + 2zx, \\ c^2 + 2ab = z^2 + 2xy. \end{cases}$$

Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

12 listopada 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 2 grudnia 2024 r.

Zadania z III serii zostaną opublikowane dnia

1 listopada 2024 r.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

2 grudnia 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.