



# LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria: do 14 października 2024 r.

1. Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

2. Dany jest prostokąt  $ABCD$  wpisany w okrąg  $\omega$  o środku  $O$ . Prosta  $\ell$  przechodzi przez  $O$  oraz przecina odcinki  $BC$  i  $AD$  odpowiednio w punktach  $E$  i  $F$ . Punkty  $K$  i  $L$  są punktami przecięcia  $\ell$  i  $\omega$ , przy czym punkty  $K, E, F, L$  leżą w takiej kolejności na prostej  $\ell$ . Proste styczne do  $\omega$  w punktach  $K$  i  $L$  przecinają prostą  $CD$  odpowiednio w punktach  $M$  i  $N$ . Udowodnić, że punkty  $E, F, M, N$  leżą na jednym okręgu.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita  $n$  będąca iloczynem 2024 parami różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych  $k$  spełniających równość

$$n + \text{NWD}(n, k) = k.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite  $n \geq 2$ , dla których istnieją takie liczby całkowite  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera  $n$  kolejnych liczb całkowitych.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

**14 października 2024 r.**

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



# LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe  
zawodów stopnia pierwszego  
II seria: do 12 listopada 2024 r.

Zadania z II serii zostaną opublikowane dnia  
**1 października 2024 r.**

*Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia*

**12 listopada 2024 r.**

*Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.*



# LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe  
zawodów stopnia pierwszego  
III seria: do 2 grudnia 2024 r.

Zadania z III serii zostaną opublikowane dnia  
**1 listopada 2024 r.**

*Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia*

**2 grudnia 2024 r.**

*Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.*