LXXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba wymierna x_1, że wszystkie wyrazy ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ spełniającego warunek

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots, 2023$$

są większe od 1 i wymierne.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie: Udowodnimy, że istnieje taka liczba. Ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ konstruujemy „od tyłu": niech $x_{2024} = 2$ oraz

$$x_n = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} \quad \text{dla } n = 2023, 2022, \ldots, 1.$$

Z określenia ciągu wprost wynika, że liczby $x_{2024}, x_{2023}, \ldots, x_2, x_1$ są wymierne. Udowodnimy przez indukcję, że $x_n > 1$ dla dowolnego n. Mamy $x_{2024} = 2 > 1$ oraz dla dowolnego $n = 2023, 2022, \ldots, 1$

$$x_n - 1 = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} - 1 = \frac{x_{n+1}^2 + 1 - 2x_{n+1}}{2x_{n+1}} = \frac{(x_{n+1} - 1)^2}{2x_{n+1}} > 0.$$

Pozostaje sprawdzić, że spełniony jest wzór z treści zadania. Mamy dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots, 2023$

$$x_n^2 - 1 = \left(\frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}}\right)^2 - 1 = \frac{x_{n+1}^4 + 2x_{n+1}^2 + 1}{4x_{n+1}^2} - 1 =$$
$$= \frac{x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 + 1}{4x_{n+1}^2} = \left(\frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}}\right)^2,$$

zatem

$$x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}} = x_{n+1}.$$

Uwaga. Wzór dany w treści zadania można zinterpretować tak: x_{n+1} jest jednym z pierwiastków równania kwadratowego $x^2 - 2x_n x + 1 = 0$, co prowadzi do równości $x_n = \dfrac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}}$. Ten związek można wyprowadzić „bez zgadywania” np. w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} \\ x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n^2 - 1} \\ x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2 &= x_n^2 - 1 \\ 2x_{n+1}x_n &= x_{n+1}^2 + 1 \\ x_n &= \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} \end{aligned}$$

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach B i D mają miarę 120°. Punkt E leży na odcinku AD, przy czym $AE \cdot BC = AB \cdot DE$. Punkt F leży na odcinku BC, przy czym $BF \cdot CD = AD \cdot FC$. Udowodnić, że proste BE i DF są równoległe.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Niech dwusieczna kąta ABC przecina AC w punkcie G. Wykorzystując założenie i twierdzenie o dwusiecznej dostajemy

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GC}.$$

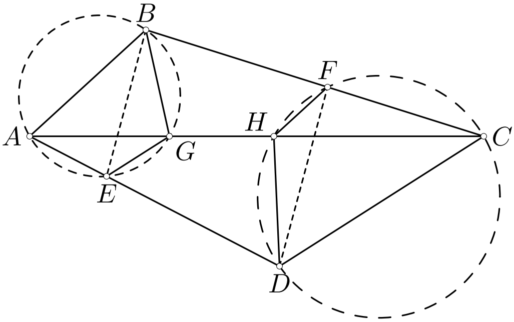
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $EG \parallel DC$. W takim razie $\sphericalangle AEG = \sphericalangle ADC = 120^\circ$. Ale $\sphericalangle ABG = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$, więc przeciwległe kąty czworokąta $ABGE$ sumują się do kąta półpełnego, czyli ten czworokąt można wpisać w okrąg. Analogicznie, niech dwusieczna kąta CDA przecina AC w H. Wtedy

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AD}{DC} = \frac{AH}{HC},$$

więc $FH \parallel AB$, $\sphericalangle HFC = \sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDH = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$ i czworokąt $CDHF$ jest wpisany w okrąg. Stąd

$$\sphericalangle BEA = \sphericalangle BGA = 60^\circ + \sphericalangle BCA = 60^\circ + \sphericalangle FDH = \sphericalangle FDA,$$

skąd $BE \parallel FD$.



3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. W Matlandii jest $2n$ miast M_1, M_2, $\ldots$, M_{2n}. Król chce wybudować sieć dróg umożliwiających przejazd z każdego miasta do każdego innego. Obecnie istnieją tylko drogi łączące M_1 z M_2, M_3, $\ldots$, M_n. Koszt budowy nowej drogi pomiędzy miastami M_i, M_j wynosi $k_{i,j} > 0$. Oznaczmy

$$K = \sum_{j=n+1}^{2n} k_{1,j} + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant 2n} k_{i,j}.$$

Udowodnić, że król może zrealizować swój plan kosztem nie większym od $\frac{2K}{3n-1}$.

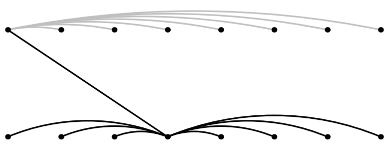
Uwaga. Wszystkie drogi są dwukierunkowe.

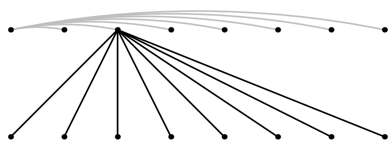
Autor zadania: Adam Trzaskowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że $K = K_0 + K_1 + K_2$, gdzie

$$K_0 = \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} k_{i,j}, \qquad K_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} k_{i,j}, \qquad K_2 = \sum_{n+1 \leqslant i < j \leqslant 2n} k_{i,j}.$$

Rozważmy następujące plany budowy nowych dróg. Dla dowolnego i ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ plan A_i zakłada budowę drogi pomiędzy M_1 i M_{n+i} oraz dróg pomiędzy M_{n+i} do wszystkich miast M_{n+j} dla $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Plan B_i zakłada budowę dróg pomiędzy M_i i wszystkimi miastami M_{n+j} dla $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.





Oznaczmy koszt budowy dróg w planie P przez $k(P)$. Wówczas dla dowolnego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

$$k(A_i) = k_{1,n+i} + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} k_{n+i,n+j}$$

oraz

$$k(B_i) = \sum_{j=n+1}^{2n} k_{i,j}.$$

Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{n} k(A_i) + k(B_1) + 2\sum_{i=2}^{n} k(B_i) = 2(K_1 + K_2),$$

gdyż droga pomiędzy M_1 i M_{n+i} pojawia się tylko w planach A_i i B_1, droga pomiędzy M_i i M_{n+j} pojawia się tylko w planie B_i, a droga pomiędzy M_{n+i} i M_{n+j} pojawia się tylko w planach A_i i A_j.

Gdyby $k(A_i) > \frac{2K}{3n-1}$ i $k(B_i) > \frac{2K}{3n-1}$ dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, to otrzymalibyśmy następującą sprzeczność:

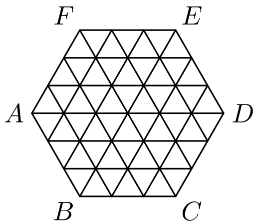
$$\begin{aligned} 2(K_1 + K_2) &= \sum_{i=1}^{n} k(A_i) + k(B_1) + 2\sum_{i=2}^{n} k(B_i) > \\ &> \sum_{i=1}^{n} \frac{2K}{3n-1} + \frac{2K}{3n-1} + 2\sum_{i=2}^{n} \frac{2K}{3n-1} = \\ &= (3n-1) \cdot \frac{2K}{3n-1} = 2K. \end{aligned}$$

W takim razie dla pewnego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ mamy $k(A_i) \leqslant \frac{2K}{3n-1}$ lub $k(B_i) \leqslant \frac{2K}{3n-1}$, co kończy dowód.

LXXV Olimpiada Matematyczna

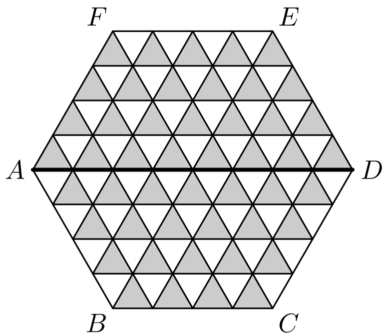
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Plansza w kształcie sześciokąta foremnego $ABCDEF$ o boku długości n składa się z $6n^2$ pól w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1. (Rysunek przedstawia planszę dla $n = 3$.) Na planszy ustawiono $3n^2$ rombów o boku długości 1 i kątach wewnętrznych 60° i 120° w taki sposób, że każdy romb całkowicie przykrywa dwa pola planszy i każde pole jest przykryte przez dokładnie jeden romb. Udowodnić, że przekątna AD dzieli na pół dokładnie n rombów.



Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Pomalujmy pola na biało i czarno w szachownicę jak na rysunku.



Niech k będzie liczbą rombów połowionych przez przekątną AD, a ℓ — liczbą rombów zawartych wewnątrz trapezu $ADEF$. Każdy romb połowiony przez przekątną AD przykrywa dokładnie jedno czarne pole wewnątrz trapezu $ADEF$ i ani jednego białego. Każdy romb zawarty wewnątrz trapezu $ADEF$ przykrywa po jednym białym polu i jednym czarnym polu w tym trapezie. Zatem w tym trapezie jest $k + \ell$ czarnych pól oraz ℓ białych pól.

Zliczając liczbę białych pól w kolejnych rzędach widzimy, że liczba białych pól w trapezie $ADEF$ jest równa

$$\ell = n + (n+1) + \ldots + (2n-1) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Pozostałe pola w tym trapezie są czarne; jest ich zatem

$$k + \ell = 3n^2 - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

Wobec tego

$$k = (k+\ell) - \ell = \frac{n(3n+1)}{2} - \frac{n(3n-1)}{2} = n,$$

co było do udowodnienia.

5. Liczby dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równość

$$5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geqslant x + y + z.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Z nierówności między średnimi dostajemy

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{a^5}{x^4} + x + x + x + x\right) \geqslant \sqrt[5]{\frac{a^5}{x^4} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = a,$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b^4}{y^3} + y + y + y\right) \geqslant \sqrt[4]{\frac{b^4}{y^3} \cdot y \cdot y \cdot y} = b,$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{c^3}{z^2} + z + z\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{c^3}{z^2} \cdot z \cdot z} = c,$$

skąd wynika, że

$$\frac{a^5}{x^4} \geqslant 5a - 4x, \quad \frac{b^4}{y^3} \geqslant 4b - 3y, \quad \frac{c^3}{z^2} \geqslant 3c - 2z.$$

Po dodaniu stronami tych nierówności i wykorzystaniu równości danej w treści zadania $5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z$ otrzymujemy

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geqslant 5a + 4b + 3c - (4x + 3y + 2z) = x + y + z.$$

6. Dana jest liczba pierwsza p. Udowodnić, że liczba

$$p \cdot \left(p^2 \cdot \frac{p^{p-1} - 1}{p - 1}\right)!$$

jest podzielna przez $p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \ldots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!$.

Autor zadania: Grzegorz Dłużewski

Rozwiązanie: Najpierw obliczymy dla dowolnej liczby pierwszej q i dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, jaki jest największy wykładnik m, dla którego $n!$ dzieli się przez q^m. Największy taki wykładnik oznaczymy przez $f(q, n)$. Symbolem $\lfloor x \rfloor$ będziemy oznaczać część całkowitą liczby x, tzn. największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą x. Niech ℓ będzie największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $q^\ell \leqslant n$. Zauważmy, że dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, \ell$ pośród liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ liczbami podzielnymi przez q^k są

$$q^k, 2q^k, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor q^k.$$

Zauważmy też, że żadna z liczb $1, 2, \ldots, n$ nie dzieli się przez q^k gdy $k > \ell$. Wynika stąd, że

$$f(q, n) = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor$$

Zauważmy też, że w powyższym wzorze można zamienić liczbę ℓ na dowolną liczbę większą od ℓ, bo $\left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor = 0$ dla $k > \ell$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Oznaczmy $n = p^2 \cdot \frac{p^{p-1}-1}{p-1}$ oraz $A = p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \ldots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!$. Należy udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej q liczba q wchodzi w rozkład na czynniki pierwsze liczby A nie więcej razy niż występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $p \cdot n!$, czyli że

$$\sum_{i=1}^{p} f(p, p^i) \leqslant 1 + f(p, n)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{p} f(q,p^i) \leqslant f(q,n)$$

gdy $q \neq p$.

Najpierw wykażemy, że w pierwszej nierówności tak naprawdę zachodzi równość. Mamy

$$f(p,p^i) = \sum_{k=1}^{i} \left\lfloor \frac{p^i}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{i} p^{i-k} = \sum_{k=0}^{i-1} p^k = \frac{p^i - 1}{p-1}$$

dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, p$. Ponadto

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2(p^{p-1}-1)}{(p-1)p} \right\rfloor = p \cdot \frac{p^{p-1}-1}{p-1} = \frac{p^p - 1}{p-1} - 1,$$

a dla $2 \leqslant i \leqslant p$ mamy

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2(p^{p-1}-1)}{(p-1)p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^{p+1-i}-1}{p-1} + \frac{p^{i-2}-1}{(p-1)p^{i-2}} \right\rfloor = \frac{p^{p+1-i}-1}{p-1}.$$

Wobec tego

$$1 + f(p,n) = 1 + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{i=2}^{p} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{p} \frac{p^{p+1-i}-1}{p-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{p^i - 1}{p-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} f(p,p^i).$$

Rozważmy teraz liczbę pierwszą $q \neq p$. Ponieważ dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, p$ liczba p^i nie dzieli się przez q, więc $f(q,p^i) = f(q,p^i - 1)$. Ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego wynika, że

$$n = \sum_{i=2}^{p} p^i = \sum_{i=1}^{p} p^i - p = \sum_{i=1}^{p} (p^i - 1).$$

Oczywiście $n > p^i - 1$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Wybierzmy liczbę M tak dużą, że $q^M > n$. Mamy, zgodnie z uwagą poczynioną na końcu pierwszego akapitu rozwiązania,

$$\sum_{i=1}^{p} f(q,p^i) = \sum_{i=1}^{p} f(q,p^i - 1) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{M} \left\lfloor \frac{p^i - 1}{q^j} \right\rfloor = (*)$$

Zmieniając kolejność sumowania oraz wykorzystując wielokrotnie nierówność $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor$ (nierówność ta wynika stąd, że $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ jest liczbą całkowitą nieprzekraczającą $x+y$) dostajemy

$$(*) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{p}\left\lfloor \frac{p^i-1}{q^j}\right\rfloor \leqslant \sum_{j=1}^{M}\left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{p}(p^i-1)}{q^j}\right\rfloor = f\left(q, \sum_{i=1}^{p}(p^i-1)\right) = f(q,n).$$

Uwaga. Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $k_1, k_2, \ldots, k_n$ o sumie k liczbę podziałów zbioru k-elementowego na zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liczności odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_n$ oznacza się symbolem $\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$. Nietrudno obliczyć, że

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.$$

W zadaniu należy udowodnić, że liczba

$$A := \frac{p\cdot\left(p^2\cdot\frac{p^{p-1}-1}{p-1}\right)!}{p!\cdot(p^2)!\cdot(p^3)!\cdot\ldots\cdot(p^{p-1})!\cdot(p^p)!}$$

jest całkowita.

Ponieważ $n = \sum_{i=1}^{p}(p^i-1)$, więc liczba

$$B := \binom{n}{p-1, p^2-1, \ldots, p^p-1} = \frac{n}{(p-1)!(p^2-1)!\ldots(p^p-1)!}$$

jest całkowita. Z drugiej strony $n = \sum_{i=2}^{p} p^i$, więc liczba

$$C := \binom{n}{p^2, p^3, \ldots, p^p}$$

jest całkowita. Zauważmy, że

$$\frac{B}{p^{(p-1)(p+2)/2}} = A = \frac{C}{(p-1)!}.$$

Z pierwszej równości wynika, że mianownik liczby wymiernej A zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest potęgą liczby pierwszej p, a z drugiej równości wynika, że ten mianownik jest niepodzielny przez p. Ów mianownik jest więc równy 1, wobec czego A jest liczbą całkowitą.