LXXV Olimpiada Matematyczna

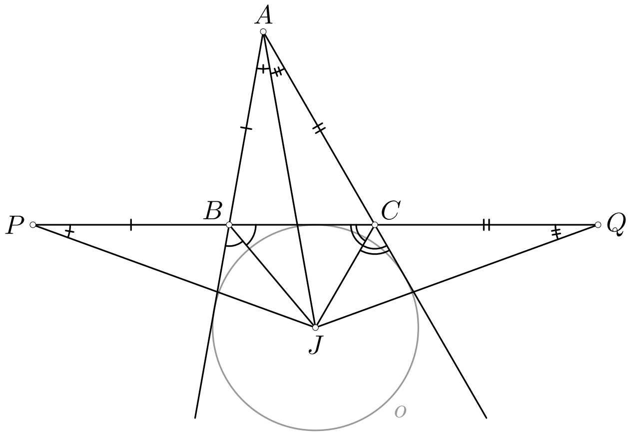
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Dany jest trójkąt ABC. Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do boku BC oraz do przedłużeń boków AB i AC. Punkty P, B, C, Q leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $PB = AB$ i $QC = AC$. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP = 180°$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Oznaczmy okrąg, o którym mowa w zadaniu przez o. Zauważmy, że $\sphericalangle JBA = \sphericalangle PBJ$, gdyż proste BA i BP są styczne do o oraz J jest środkiem o. Z założeń zadania wiadomo też, że $AB = PB$. Ponadto trójkąty ABJ i PBJ mają wspólny bok BJ. Z cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok wynika więc, że trójkąty ABJ i PBJ są przystające. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAJ = \sphericalangle JPB$. Analogicznie, z równości $\sphericalangle ACJ = \sphericalangle JCQ$, $AC = CQ$ wynika, że trójkąty ACJ i QCJ są przystające, skąd $\sphericalangle JAC = \sphericalangle CQJ$. Korzystając z otrzymanych związków oraz z faktu, że suma kątów wewnętrznych trójkąta PJQ wynosi $180°$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP &= \sphericalangle BAJ + \sphericalangle JAC + \sphericalangle QJP = \\ &= \sphericalangle JPB + \sphericalangle CQJ + \sphericalangle QJP = 180°.\end{aligned}$$



2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite x, dla których liczba

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

jest potęgą liczby pierwszej.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4).$$

Jeśli powyższa liczba jest potęgą liczby pierwszej p, to każdy z czynników $1+x, 1+x^2, 1+x^4$ także jest potęgą liczby p. Zapiszmy $p^a = 1+x$, $p^b = 1+x^2$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a, b. Mamy $a, b \geqslant 1$, gdyż $x > 0$. Podstawiając $x = p^a - 1$ do równości $p^b = 1 + x^2$ otrzymujemy

$$p^b = 1 + x^2 = 1 + (p^a - 1)^2 = 1 + p^{2a} - 2p^a + 1 = p^{2a} - 2p^a + 2.$$

Stąd

$$2 = p^b - p^{2a} + 2p^a = p(p^{b-1} - p^{2a-1} + 2p^{a-1}).$$

Z powyższej równości wynika, że $p = 2$ oraz

$$1 = p^{b-1} - p^{2a-1} + 2p^{a-1} = 2^{b-1} - 2^{2a-1} + 2^a.$$

Wynika stąd, że $b = 1$, gdyż w przeciwnym razie powyższa liczba byłaby parzysta. Wnioskujemy, że $1 + x^2 = 2$, skąd $x = 1$. Pozostaje sprawdzić, że dla $x = 1$ liczba z zadania jest równa $8 = 2^3$; jest więc potęgą liczby pierwszej.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $x = 1$.

3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość

$$x \cdot \frac{4^x - 2^y}{4^x + 2^y} = y \cdot \frac{4^y - 2^x}{4^y + 2^x}.$$

Dowieść, że $|x| = |y|$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $|x| \neq |y|$. Naszym celem jest doprowadzenie do sprzeczności.

Przekształćmy równość daną w treści zadania w następujący sposób.

$$x(4^x-2^y)(4^y+2^x)=y(4^y-2^x)(4^x+2^y),$$
$$x(4^{x+y}+8^x-8^y-2^{x+y})=y(4^{x+y}+8^y-8^x-2^{x+y}),$$
$$(x-y)(4^{x+y}-2^{x+y})=(x+y)(8^y-8^x),$$
$$2^{x+y}\cdot\frac{2^{x+y}-1}{x+y}=8^y\cdot\frac{1-8^{x-y}}{x-y}. \qquad (\heartsuit)$$

Wykorzystując następujące własności funkcji wykładniczej

$$2^t>1 \iff t>0 \iff 8^t>1$$
$$2^t<1 \iff t<0 \iff 8^t<1$$

wnioskujemy że

$$\frac{2^{x+y}-1}{x+y}>0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1-8^{x-y}}{x-y}<0.$$

W takim razie lewa strona równości ($\heartsuit$) jest dodatnia, a prawa ujemna — sprzeczność.

4. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach

$$1\times n,\ 2\times n,\ 3\times n,\ \ldots,\ n\times n$$

można ułożyć kwadrat.

Uwaga. Prostokąty można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że z prostokątów o wymiarach $1\times n, 2\times n, \ldots, n\times n$ można ułożyć kwadrat o boku m. Pole tego kwadratu to z jednej strony m^2, a z drugiej

$$1\cdot n+2\cdot n+\ldots+n\cdot n=(1+2+\ldots+n)\cdot n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot n.$$

Wynika stąd, że $2m^2=n^2(n+1)$. Z tej równości wynika, że n^2 jest dzielnikiem liczby $2m^2$, zatem n jest dzielnikiem liczby m. Zapisując $m=kn$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k otrzymujemy $2k^2=n+1$. Stąd wynika, że n musi być postaci $2k^2-1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

Wykażemy teraz, że każda liczba n postaci $2k^2-1$ spełnia warunki zadania. Wszystkie prostokąty poza ostatnim łączymy w $\frac{n-1}{2}=k^2-1$ par postaci $i\times n$, $(n-i)\times n$. Z każdej takiej pary prostokątów układamy kwadrat $n\times n$. W ten sposób ułożyliśmy k^2-1 kwadratów $n\times n$. Do dyspozycji mamy też jeden kwadrat $n\times n$, którego na początku nie sparowaliśmy z żadnym innym prostokątem. Łącznie mamy więc k^2 kwadratów $n\times n$, z których układamy kwadrat $kn\times kn$.

Odpowiedź: Liczby postaci $2k^2-1$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita dająca resztę 3 z dzielenia przez 7. Udowodnić, że suma sześcianów jej dodatnich dzielników dzieli się przez 7.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:
Sposób 1. Rozważmy liczbę $n=7k+3$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Niech S oznacza sumę sześcianów dodatnich dzielników liczby n. Zauważmy, że jeśli d jest dzielnikiem n, to $\frac{n}{d}$ również jest dzielnikiem n oraz $d\cdot\frac{n}{d}=n$. Udowodnimy, że dla dowolnego dzielnika d liczby n liczba $d^3+\left(\frac{n}{d}\right)^3$ dzieli się przez 7. Wyniknie stąd teza zadania, gdyż wtedy liczba

$$2S=\sum_{d|n}\left(d^3+\left(\frac{n}{d}\right)^3\right)$$

będzie podzielna przez 7 jako suma liczb podzielnych przez 7.

Rozważmy dowolny dzielnik d liczby n. Wtedy d nie dzieli się przez 7, bo n nie dzieli się przez 7. Zauważmy, że

$$d^3+\left(\frac{n}{d}\right)^3=\frac{d^6+n^3}{d^3}.$$

Wystarczy więc wykazać, że liczba d^6+n^3 dzieli się przez 7. Zauważmy, że n^3 daje resztę 6 z dzielenia przez 7, bo

$$n^3=(7k+3)^3=(7k)^3+3\cdot(7k)^2\cdot3+3\cdot7k\cdot3^2+3^3=7\cdot(49k^3+63k^2+27k+3)+6.$$

Wystarczy więc dowieść, że d^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7. Zapiszmy $d=7\ell+r$, gdzie ℓ jest liczbą całkowitą oraz $r\in\{1,2,\ldots,6\}$. Wówczas

$$d^6-r^6=(d-r)(d^5+d^4r+\ldots+r^5)=7\ell(d^5+d^4r+\ldots+r^5)$$

Liczba d^6 daje więc taką samą resztę z dzielenia przez 7 co r^6. Bezpośrednio sprawdzamy, że r^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7 dla $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$:

$$\begin{array}{ll} 1^6 = 1 = 7 \cdot 0 + 1, & 2^6 = 64 = 7 \cdot 9 + 1 \\ 3^6 = 729 = 7 \cdot 104 + 1, & 4^6 = 4096 = 7 \cdot 585 + 1, \\ 5^6 = 15625 = 7 \cdot 2232 + 1, & 6^6 = 46656 = 7 \cdot 6665 + 1. \end{array}$$

Uwaga. To, że d^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7, można uzasadnić powołując się na *małe twierdzenie Fermata*. Orzeka ono, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla dowolnej liczby całkowitej a liczba $a^p - a$ dzieli się przez p. Małe twierdzenie Fermata można udowodnić np. przez indukcję, wykorzystując w kroku indukcyjnym tożsamość

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} a + 1$$

oraz fakt, że symbole Newtona $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$ dzielą się przez p, gdyż p jest liczbą pierwszą.

Sposób 2. Wszystkie przystawania będą rozważane modulo 7. Niech n będzie liczbą dającą resztę 3 z dzielenia przez 7. Niech

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$$

będzie rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. Zauważmy, że wśród liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nie występuje 7. Dodatnimi dzielnikami n są liczby postaci $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_k^{i_k}$, gdzie $i_j \in \{0, 1, \ldots, a_j\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$. W takim razie suma ich sześcianów jest równa

$$\sum_{i_1=0}^{a_1} \sum_{i_2=0}^{a_2} \ldots \sum_{i_k=0}^{a_k} \left(p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_k^{i_k}\right)^3 = \prod_{j=1}^{k} (1 + p_j^3 + \ldots + p_j^{3a_j}).$$

Należy udowodnić, że $1 + p_j^3 + \ldots + p_j^{3a_j} \equiv 0$ dla pewnego $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Zbadajmy najpierw jaką resztę z dzielenia przez 7 daje liczba p^3 w zależności od reszty z dzielenia p przez 7. Niech $p = 7\ell + r$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ oraz $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Mamy

$$\begin{aligned} (7\ell+1)^3 &\equiv 1^3 = 1, \\ (7\ell+2)^3 &\equiv 2^3 = 8 \equiv 1, \\ (7\ell+3)^3 &\equiv 3^3 = 27 \equiv -1, \\ (7\ell+4)^3 &\equiv 4^3 = 64 \equiv 1, \\ (7\ell+5)^3 &\equiv 5^3 = 125 \equiv -1, \\ (7\ell+6)^3 &\equiv 6^3 = 216 \equiv -1. \end{aligned}$$

W takim razie jeśli $r \in \{3, 5, 6\}$, to

$$1 + p^3 + \ldots + p^{3a} \equiv 1 - 1 + \ldots + (-1)^a = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 2 \nmid a \\ 1, & \text{jeśli } 2 \mid a \end{cases}$$

Załóżmy nie wprost, że liczba $1 + p_j^3 + \ldots + p_j^{3a_j}$ nie dzieli się przez 7 dla żadnego $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jeśli $p_j \equiv 3, 5, 6$, to $2 \mid a_j$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $p_1, p_2, \ldots, p_s$ dają reszty 1, 2, 4 z dzielenia przez 7, a liczby $p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_k$ dają reszty 3, 5, 6. Zapisując n w postaci

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s} (p_{s+1}^2)^{a_{s+1}/2} (p_{s+2}^2)^{a_{s+2}/2} \ldots (p_k^2)^{a_k/2}$$

i zauważając, że $3^2 \equiv 2$, $5^2 \equiv 4$, $6^2 \equiv 1$, widzimy że n jest iloczynem liczb dających reszty 1, 2, 4 z dzielenia przez 7. Taka liczba też daje resztę 1, 2 bądź 4, ponieważ

$$1 \cdot 1 \equiv 1, \quad 1 \cdot 2 \equiv 2, \quad 1 \cdot 4 \equiv 4, \quad 2 \cdot 2 \equiv 4, \quad 2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 4 \cdot 4 \equiv 2.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że $n \equiv 3$, co kończy dowód.

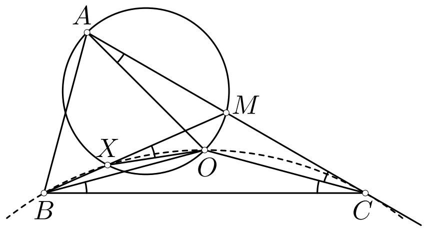
6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt M jest środkiem boku AC. Okrąg opisany na trójkącie AMO przecina odcinek BM w punkcie X różnym od M. Wykazać, że $CX = 2MX$.

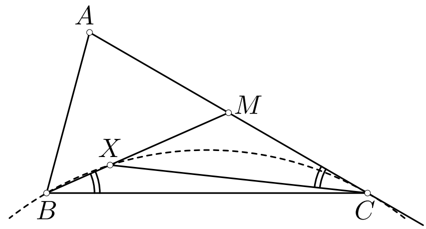
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Sposób 1. Niech $\sphericalangle ACB = 2\varphi$. Wówczas $\sphericalangle OXM = \sphericalangle OAM = \varphi$, więc

$$\sphericalangle BXO = 180^\circ - \sphericalangle OXM = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - \sphericalangle OCB.$$

Z tej równości wynika, że punkty B, X, O, C leżą na jednym okręgu. Ten okrąg jest styczny do prostej AC w punkcie C, gdyż $\sphericalangle ACO = \varphi = \sphericalangle CBO$.





Wynika stąd, że $\sphericalangle MCX = \sphericalangle CBM$. Ponadto trójkąty MCX i MBC mają wspólny kąt przy wierzchołku M. Z cechy podobieństwa kąt-kąt wynika zatem, że te trójkąty są podobne. W takim razie

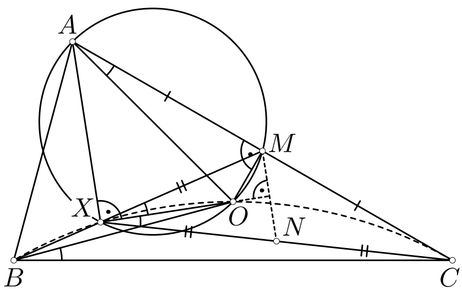
$$\frac{CX}{XM} = \frac{BC}{CM} = 2,$$

co daje tezę.

Sposób 2. Tak jak w sposobie pierwszym oznaczamy $\sphericalangle ACB = 2\varphi$ i dowodzimy, że punkty B, X, O, C leżą na jednym okręgu. Mamy

$$\sphericalangle CXO = \sphericalangle CBO = \varphi = \sphericalangle OAM = \sphericalangle OXM.$$

Oznaczmy punkt symetryczny do M względem OX przez N. Z powyższej równości kątów wynika, że N leży na prostej XC. Mamy $MX = NX$ oraz $MN \perp OX$. Z drugiej strony $AX \perp OX$, bo AO jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie AOM. Wynika stąd, że $AX \parallel MN$. Ponieważ M jest środkiem AC, prosta MN jest linią środkową w trójkącie CAX. Stąd wniosek, że N jest środkiem odcinka CX. Ostatecznie $CX = 2NX = 2MX$.

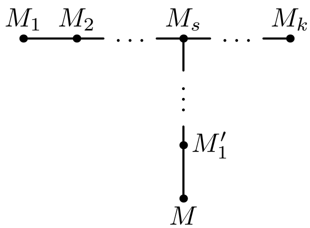


7. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. W Matlandii znajduje się n^2 miast. Pomiędzy niektórymi miastami istnieją dwukierunkowe połączenia lotnicze. Wiadomo, że z każdego miasta można odbyć podróż do każdego innego miasta (być może z przesiadkami). Ciąg parami różnych miast $M_1, M_2, \ldots, M_k$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k-1$ istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze pomiędzy miastami M_i i M_{i+1}, będziemy nazywać *trasą długości k*. Każdemu miastu przypisujemy największą taką liczbę całkowitą k, że istnieje trasa długości k zawierająca to miasto. Dowieść, że pewna liczba została przypisana co najmniej $n\sqrt{2}$ miastom.

Autor zadania: Paweł Gadziński

Rozwiązanie: Spośród wszystkich tras wybierzmy tę, która ma największą długość (jeśli jest kilka takich, wybieramy dowolną z nich). Powiedzmy, że jest to trasa długości k. Oznaczmy kolejne miasta tej trasy przez $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Zauważmy, że liczba k została przypisana wszystkim miastom na tej trasie. Jeśli $k \geqslant n\sqrt{2}$, to warunki zadania są więc spełnione. Rozważmy więc przypadek, w którym $k < n\sqrt{2}$. Dla uproszczenia zapisu dalszych rozważań przyjmijmy, że $k = 2\ell + m$, gdzie $\ell \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą oraz $m \in \{0, 1\}$.

Wykażemy, że każdemu miastu przypisano liczbę większą lub równą $\ell + 2$. Rozważmy dowolne miasto M różne od $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Z założeń zadania wiemy, że istnieje trasa rozpoczynająca się miastem M i kończąca się miastem M_1. Niech M_s będzie tym miastem pośród $M_1, M_2, \ldots, M_k$, które pojawia się najwcześniej na owej trasie. Początkowy fragment tej trasy wygląda więc następująco: $M, M'_1, M'_2, \ldots, M'_t, M_s$, przy czym wszystkie miasta $M'_1, \ldots, M'_t$ są różne od $M_1, M_2, \ldots, M_k$.



Jeśli $s \leqslant \ell$, to trasa

$$M, M'_1, \ldots, M'_t, M_s, M_{s+1}, \ldots, M_k$$

ma długość $1 + t + k - s + 1 \geqslant k - s + 2 = 2\ell + m - s + 2 \geqslant \ell + 2$. Jeśli zaś $s \geqslant \ell + 1$, to trasa

$$M, M'_1, \ldots, M'_t, M_s, M_{s-1}, \ldots, M_1$$

ma długość $1 + t + s \geqslant 1 + s \geqslant \ell + 2$. W obu przypadkach oznacza to, że miastu M przypisano liczbę większą lub równą $\ell + 2$.

Dla dowolnego i oznaczmy przez x_i liczbę miast, którym przypisano liczbę i. Wówczas

$$n^2 = x_{\ell+2} + x_{\ell+3} + \ldots + x_k.$$

Załóżmy nie wprost, że $x_i < n\sqrt{2}$ dla dowolnego i. Z powyższej równości wynika, że

$$n^2 < (k - \ell - 1) \cdot n\sqrt{2} < \frac{k}{2} \cdot n\sqrt{2} < \frac{n\sqrt{2}}{2} \cdot n\sqrt{2} = n^2,$$

sprzeczność. Wobec tego $x_i \geqslant n\sqrt{2}$ dla pewnego i, co kończy dowód.

8. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych mające następującą własność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ będących długościami boków pewnego trójkąta i dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z o sumie 0 zachodzi nierówność

$$W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leqslant 0.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Podstawiając $x = y = 1$, $z = -2$ otrzymujemy, że dla dowolnych a, b, c będących długościami boków trójkąta zachodzi nierówność

$$2W(a) + 2W(b) \geqslant W(c). \qquad (\clubsuit)$$

W szczególności dla $a = b = c$ otrzymujemy $W(a) \geqslant 0$ dla dowolnego $a > 0$.

Wielomian stale równy 0 oczywiście spełnia warunki zadania. Rozważmy niezerowy wielomian $W(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ spełniający warunki zadania. Z tego, że $W(a) \geqslant 0$ dla $a > 0$ wynika w szczególności, że współczynnik wiodący a_n jest dodatni, a wyraz wolny a_0 jest nieujemny. Oznacza to, że jeśli $n \leqslant 1$, to W jest funkcją liniową o nieujemnych współczynnikach.

Dla dowolnego $t > 1$ podstawmy $a = b = t$, $c = 2t - 1$ do zależności ($\clubsuit$). Otrzymujemy nierówność $4W(t) \geqslant W(2t - 1)$. Jeżeli $n \geqslant 3$, to współczynnik wiodący wielomianu $4W(t) - W(2t - 1)$ jest równy $4a_n - 2^n a_n$, jest więc ujemny. Wówczas $4W(t) - W(2t - 1) < 0$ dla dostatecznie dużych t, sprzeczność. Wobec tego $n \leqslant 2$.

Załóżmy, że $n = 2$. Udowodnimy, że $a_1 \geqslant 0$. Załóżmy przeciwnie: $a_1 < 0$. Podstawiając do ($\clubsuit$) $a = b = t$, $c = 2t - \varepsilon$, gdzie $t > 1$ i $\varepsilon \in (0, 1)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
4W(t) &\geqslant W(2t - \varepsilon) \\
4(a_2 t^2 + a_1 t + a_0) &\geqslant a_2(2t - \varepsilon)^2 + a_1(2t - \varepsilon) + a_0 \\
4a_2 t^2 + 4a_1 t + 4a_0 &\geqslant 4a_2 t^2 + (-4a_2\varepsilon + 2a_1)t + a_2\varepsilon^2 - a_1\varepsilon + a_0 \\
(2a_1 + 4a_2\varepsilon)t &\geqslant a_2\varepsilon^2 - a_1\varepsilon - 3a_0 \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Dobierając liczbę $\varepsilon > 0$ tak małą, że $2a_1 + 4a_2\varepsilon < 0$ oraz dostatecznie dużą liczbę t widzimy, że nierówność ($\spadesuit$) jest nieprawdziwa — sprzeczność. Zatem $a_1 \geqslant 0$.

Dotychczas udowodniliśmy, że jeśli W spełnia warunki zadania, to jest wielomianem stopnia co najwyżej 2 o nieujemnych współczynnikach. Udowodnimy, że wszystkie takie wielomiany spełniają warunki zadania.

Rozważmy dowolny wielomian $W(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$, gdzie $a_2,a_1,a_0\geqslant 0$. Rozważmy dowolne liczby a,b,c będące długościami boków trójkąta oraz dowolne liczby rzeczywiste x,y,z o sumie 0. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy założyć, że liczby x,y są tego samego znaku (tj. obie są nieujemne lub obie są ujemne). Niech $d=\frac{1}{2}(-a+b+c)$, $e=\frac{1}{2}(a-b+c)$ i $f=\frac{1}{2}(a+b-c)$. Wówczas $xy\geqslant 0$, $d,e,f>0$, $a=e+f$, $b=f+d$, $c=d+e$ oraz $z=-(x+y)$. Należy udowodnić, że $W(a)yz+W(b)zx+W(c)xy\leqslant 0$, czyli że

$$W(a)y(x+y)+W(b)x(x+y)-W(c)xy\geqslant 0.$$

Mamy

$$W(a)y(x+y)+W(b)x(x+y)-W(c)xy=a_2P+a_1Q+a_0R,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
P&=a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-c^2xy,\\
Q&=ay(x+y)+bx(x+y)-cxy,\\
R&=y(x+y)+x(x+y)-xy.
\end{aligned}$$

Wystarczy udowodnić, że $P,Q,R\geqslant 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
P&\geqslant e^2(xy+y^2)+d^2(x^2+xy)-(d+e)^2xy=\\
&=e^2y^2+d^2x^2-2dexy=(dx-ey)^2\geqslant 0,\\
Q&\geqslant e(xy+y^2)+d(x^2+xy)-(d+e)xy=\\
&=ey^2+dx^2\geqslant 0,\\
R&=x^2+xy+y^2=\big(x+\tfrac{1}{2}y\big)^2+\tfrac{3}{4}y^2\geqslant 0,
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Odpowiedź: Wielomiany postaci $W(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$, gdzie $a_2,a_1,a_0\geqslant 0$.