LXXV Olimpiada Matematyczna

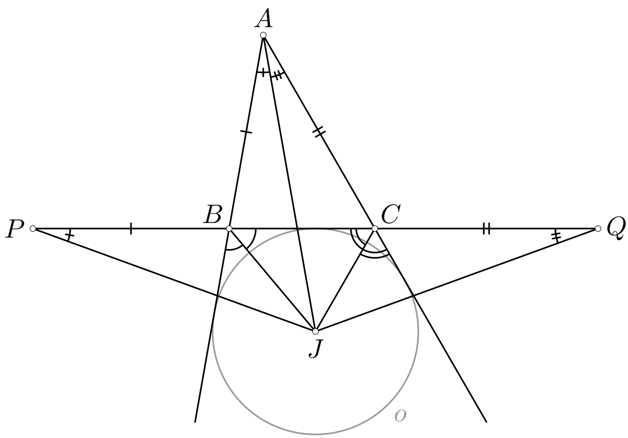
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Dany jest trójkąt ABC. Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do boku BC oraz do przedłużeń boków AB i AC. Punkty P, B, C, Q leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $PB = AB$ i $QC = AC$. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP = 180^\circ$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Oznaczmy okrąg, o którym mowa w zadaniu przez o. Zauważmy, że $\sphericalangle JBA = \sphericalangle PBJ$, gdyż proste BA i BP są styczne do o oraz J jest środkiem o. Z założeń zadania wiadomo też, że $AB = PB$. Ponadto trójkąty ABJ i PBJ mają wspólny bok BJ. Z cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok wynika więc, że trójkąty ABJ i PBJ są przystające. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAJ = \sphericalangle JPB$. Analogicznie, z równości $\sphericalangle ACJ = \sphericalangle JCQ$, $AC = CQ$ wynika, że trójkąty ACJ i QCJ są przystające, skąd $\sphericalangle JAC = \sphericalangle CQJ$. Korzystając z otrzymanych związków oraz z faktu, że suma kątów wewnętrznych trójkąta PJQ wynosi 180° otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP &= \sphericalangle BAJ + \sphericalangle JAC + \sphericalangle QJP = \\ &= \sphericalangle JPB + \sphericalangle CQJ + \sphericalangle QJP = 180^\circ.\end{aligned}$$



2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite x, dla których liczba

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

jest potęgą liczby pierwszej.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4).$$

Jeśli powyższa liczba jest potęgą liczby pierwszej p, to każdy z czynników $1+x, 1+x^2, 1+x^4$ także jest potęgą liczby p. Zapiszmy $p^a = 1+x$, $p^b = 1+x^2$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a, b. Mamy $a, b \geqslant 1$, gdyż $x > 0$. Podstawiając $x = p^a - 1$ do równości $p^b = 1 + x^2$ otrzymujemy

$$p^b = 1 + x^2 = 1 + (p^a - 1)^2 = 1 + p^{2a} - 2p^a + 1 = p^{2a} - 2p^a + 2.$$

Stąd

$$2 = p^b - p^{2a} + 2p^a = p(p^{b-1} - p^{2a-1} + 2p^{a-1}).$$

Z powyższej równości wynika, że $p = 2$ oraz

$$1 = p^{b-1} - p^{2a-1} + 2p^{a-1} = 2^{b-1} - 2^{2a-1} + 2^a.$$

Wynika stąd, że $b = 1$, gdyż w przeciwnym razie powyższa liczba byłaby parzysta. Wnioskujemy, że $1 + x^2 = 2$, skąd $x = 1$. Pozostaje sprawdzić, że dla $x = 1$ liczba z zadania jest równa $8 = 2^3$; jest więc potęgą liczby pierwszej.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $x = 1$.

3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość

$$x \cdot \frac{4^x - 2^y}{4^x + 2^y} = y \cdot \frac{4^y - 2^x}{4^y + 2^x}.$$

Dowieść, że $|x| = |y|$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $|x| \neq |y|$. Naszym celem jest doprowadzenie do sprzeczności.

Przekształćmy równość daną w treści zadania w następujący sposób.

$$x(4^x - 2^y)(4^y + 2^x) = y(4^y - 2^x)(4^x + 2^y),$$
$$x(4^{x+y} + 8^x - 8^y - 2^{x+y}) = y(4^{x+y} + 8^y - 8^x - 2^{x+y}),$$
$$(x - y)(4^{x+y} - 2^{x+y}) = (x + y)(8^y - 8^x),$$
$$2^{x+y} \cdot \frac{2^{x+y} - 1}{x + y} = 8^y \cdot \frac{1 - 8^{x-y}}{x - y}. \qquad (\heartsuit)$$

Wykorzystując następujące własności funkcji wykładniczej

$$2^t > 1 \iff t > 0 \iff 8^t > 1$$
$$2^t < 1 \iff t < 0 \iff 8^t < 1$$

wnioskujemy że

$$\frac{2^{x+y} - 1}{x + y} > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1 - 8^{x-y}}{x - y} < 0.$$

W takim razie lewa strona równości ($\heartsuit$) jest dodatnia, a prawa ujemna — sprzeczność.

4. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach

$$1 \times n,\ 2 \times n,\ 3 \times n,\ \ldots,\ n \times n$$

można ułożyć kwadrat.

Uwaga. Prostokąty można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że z prostokątów o wymiarach $1 \times n, 2 \times n, \ldots, n \times n$ można ułożyć kwadrat o boku m. Pole tego kwadratu to z jednej strony m^2, a z drugiej

$$1 \cdot n + 2 \cdot n + \ldots + n \cdot n = (1 + 2 + \ldots + n) \cdot n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot n.$$

Wynika stąd, że $2m^2 = n^2(n+1)$. Z tej równości wynika, że n^2 jest dzielnikiem liczby $2m^2$, zatem n jest dzielnikiem liczby m. Zapisując $m = kn$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k otrzymujemy $2k^2 = n + 1$. Stąd wynika, że n musi być postaci $2k^2 - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

Wykażemy teraz, że każda liczba n postaci $2k^2-1$ spełnia warunki zadania. Wszystkie prostokąty poza ostatnim łączymy w $\frac{n-1}{2}=k^2-1$ par postaci $i\times n$, $(n-i)\times n$. Z każdej takiej pary prostokątów układamy kwadrat $n\times n$. W ten sposób ułożyliśmy k^2-1 kwadratów $n\times n$. Do dyspozycji mamy też jeden kwadrat $n\times n$, którego na początku nie sparowaliśmy z żadnym innym prostokątem. Łącznie mamy więc k^2 kwadratów $n\times n$, z których układamy kwadrat $kn\times kn$.

Odpowiedź: Liczby postaci $2k^2-1$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita dająca resztę 3 z dzielenia przez 7. Udowodnić, że suma sześcianów jej dodatnich dzielników dzieli się przez 7.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:
Sposób 1. Rozważmy liczbę $n=7k+3$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Niech S oznacza sumę sześcianów dodatnich dzielników liczby n. Zauważmy, że jeśli d jest dzielnikiem n, to $\frac{n}{d}$ również jest dzielnikiem n oraz $d\cdot\frac{n}{d}=n$. Udowodnimy, że dla dowolnego dzielnika d liczby n liczba $d^3+\left(\frac{n}{d}\right)^3$ dzieli się przez 7. Wyniknie stąd teza zadania, gdyż wtedy liczba

$$2S=\sum_{d\mid n}\left(d^3+\left(\frac{n}{d}\right)^3\right)$$

będzie podzielna przez 7 jako suma liczb podzielnych przez 7.

Rozważmy dowolny dzielnik d liczby n. Wtedy d nie dzieli się przez 7, bo n nie dzieli się przez 7. Zauważmy, że

$$d^3+\left(\frac{n}{d}\right)^3=\frac{d^6+n^3}{d^3}.$$

Wystarczy więc wykazać, że liczba d^6+n^3 dzieli się przez 7. Zauważmy, że n^3 daje resztę 6 z dzielenia przez 7, bo

$$n^3=(7k+3)^3=(7k)^3+3\cdot(7k)^2\cdot 3+3\cdot 7k\cdot 3^2+3^3=7\cdot(49k^3+63k^2+27k+3)+6.$$

Wystarczy więc dowieść, że d^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7. Zapiszmy $d=7\ell+r$, gdzie ℓ jest liczbą całkowitą oraz $r\in\{1,2,\ldots,6\}$. Wówczas

$$d^6-r^6=(d-r)(d^5+d^4r+\ldots+r^5)=7\ell(d^5+d^4r+\ldots+r^5)$$

Liczba d^6 daje więc taką samą resztę z dzielenia przez 7 co r^6. Bezpośrednio sprawdzamy, że r^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7 dla $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$:

$$\begin{array}{ll} 1^6 = 1 = 7 \cdot 0 + 1, & 2^6 = 64 = 7 \cdot 9 + 1 \\ 3^6 = 729 = 7 \cdot 104 + 1, & 4^6 = 4096 = 7 \cdot 585 + 1, \\ 5^6 = 15625 = 7 \cdot 2232 + 1, & 6^6 = 46656 = 7 \cdot 6665 + 1. \end{array}$$

Uwaga. To, że d^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7, można uzasadnić powołując się na *małe twierdzenie Fermata*. Orzeka ono, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla dowolnej liczby całkowitej a liczba $a^p - a$ dzieli się przez p. Małe twierdzenie Fermata można udowodnić np. przez indukcję, wykorzystując w kroku indukcyjnym tożsamość

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} a + 1$$

oraz fakt, że symbole Newtona $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$ dzielą się przez p, gdyż p jest liczbą pierwszą.

Sposób 2. Wszystkie przystawania będą rozważane modulo 7. Niech n będzie liczbą dającą resztę 3 z dzielenia przez 7. Niech

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$$

będzie rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. Zauważmy, że wśród liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nie występuje 7. Dodatnimi dzielnikami n są liczby postaci $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_k^{i_k}$, gdzie $i_j \in \{0, 1, \ldots, a_j\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$. W takim razie suma ich sześcianów jest równa

$$\sum_{i_1=0}^{a_1} \sum_{i_2=0}^{a_2} \cdots \sum_{i_k=0}^{a_k} \left(p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_k^{i_k}\right)^3 = \prod_{j=1}^{k} (1 + p_j^3 + \ldots + p_j^{3a_j}).$$

Należy udowodnić, że $1 + p_j^3 + \ldots + p_j^{3a_j} \equiv 0$ dla pewnego $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Zbadajmy najpierw jaką resztę z dzielenia przez 7 daje liczba p^3 w zależności od reszty z dzielenia p przez 7. Niech $p = 7\ell + r$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ oraz $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Mamy

$$\begin{aligned} (7\ell+1)^3 &\equiv 1^3 = 1, \\ (7\ell+2)^3 &\equiv 2^3 = 8 \equiv 1, \\ (7\ell+3)^3 &\equiv 3^3 = 27 \equiv -1, \\ (7\ell+4)^3 &\equiv 4^3 = 64 \equiv 1, \\ (7\ell+5)^3 &\equiv 5^3 = 125 \equiv -1, \\ (7\ell+6)^3 &\equiv 6^3 = 216 \equiv -1. \end{aligned}$$

W takim razie jeśli $r \in \{3,5,6\}$, to

$$1 + p^3 + \ldots + p^{3a} \equiv 1 - 1 + \ldots + (-1)^a = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 2 \nmid a \\ 1, & \text{jeśli } 2 \mid a \end{cases}$$

Załóżmy nie wprost, że liczba $1 + p_j^3 + \ldots + p_j^{3a_j}$ nie dzieli się przez 7 dla żadnego $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jeśli $p_j \equiv 3, 5, 6$, to $2 \mid a_j$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $p_1, p_2, \ldots, p_s$ dają reszty 1, 2, 4 z dzielenia przez 7, a liczby $p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_k$ dają reszty 3, 5, 6. Zapisując n w postaci

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s} (p_{s+1}^2)^{a_{s+1}/2} (p_{s+2}^2)^{a_{s+2}/2} \ldots (p_k^2)^{a_k/2}$$

i zauważając, że $3^2 \equiv 2$, $5^2 \equiv 4$, $6^2 \equiv 1$, widzimy że n jest iloczynem liczb dających reszty 1, 2, 4 z dzielenia przez 7. Taka liczba też daje resztę 1, 2 bądź 4, ponieważ

$$1 \cdot 1 \equiv 1, \quad 1 \cdot 2 \equiv 2, \quad 1 \cdot 4 \equiv 4, \quad 2 \cdot 2 \equiv 4, \quad 2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 4 \cdot 4 \equiv 2.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że $n \equiv 3$, co kończy dowód.

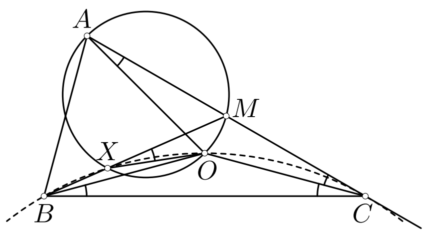
6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt M jest środkiem boku AC. Okrąg opisany na trójkącie AMO przecina odcinek BM w punkcie X różnym od M. Wykazać, że $CX = 2MX$.

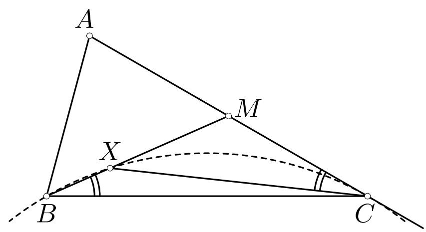
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Sposób 1. Niech $\sphericalangle ACB = 2\varphi$. Wówczas $\sphericalangle OXM = \sphericalangle OAM = \varphi$, więc

$$\sphericalangle BXO = 180^\circ - \sphericalangle OXM = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - \sphericalangle OCB.$$

Z tej równości wynika, że punkty B, X, O, C leżą na jednym okręgu. Ten okrąg jest styczny do prostej AC w punkcie C, gdyż $\sphericalangle ACO = \varphi = \sphericalangle CBO$.





Wynika stąd, że $\sphericalangle MCX = \sphericalangle CBM$. Ponadto trójkąty MCX i MBC mają wspólny kąt przy wierzchołku M. Z cechy podobieństwa kąt-kąt wynika zatem, że te trójkąty są podobne. W takim razie

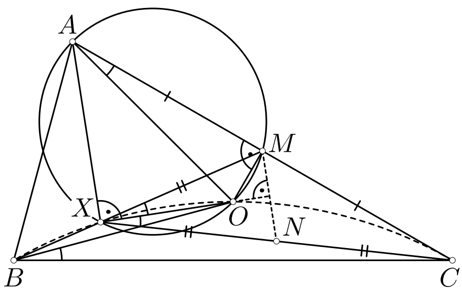
$$\frac{CX}{XM} = \frac{BC}{CM} = 2,$$

co daje tezę.

Sposób 2. Tak jak w sposobie pierwszym oznaczamy $\sphericalangle ACB = 2\varphi$ i dowodzimy, że punkty B, X, O, C leżą na jednym okręgu. Mamy

$$\sphericalangle CXO = \sphericalangle CBO = \varphi = \sphericalangle OAM = \sphericalangle OXM.$$

Oznaczmy punkt symetryczny do M względem OX przez N. Z powyższej równości kątów wynika, że N leży na prostej XC. Mamy $MX = NX$ oraz $MN \perp OX$. Z drugiej strony $AX \perp OX$, bo AO jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie AOM. Wynika stąd, że $AX \parallel MN$. Ponieważ M jest środkiem AC, prosta MN jest linią środkową w trójkącie CAX. Stąd wniosek, że N jest środkiem odcinka CX. Ostatecznie $CX = 2NX = 2MX$.

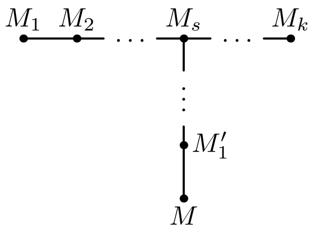


7. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. W Matlandii znajduje się n^2 miast. Pomiędzy niektórymi miastami istnieją dwukierunkowe połączenia lotnicze. Wiadomo, że z każdego miasta można odbyć podróż do każdego innego miasta (być może z przesiadkami). Ciąg parami różnych miast $M_1, M_2, \ldots, M_k$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k-1$ istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze pomiędzy miastami M_i i M_{i+1}, będziemy nazywać *trasą długości k*. Każdemu miastu przypisujemy największą taką liczbę całkowitą k, że istnieje trasa długości k zawierająca to miasto. Dowieść, że pewna liczba została przypisana co najmniej $n\sqrt{2}$ miastom.

Autor zadania: Paweł Gadziński

Rozwiązanie: Spośród wszystkich tras wybierzmy tę, która ma największą długość (jeśli jest kilka takich, wybieramy dowolną z nich). Powiedzmy, że jest to trasa długości k. Oznaczmy kolejne miasta tej trasy przez $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Zauważmy, że liczba k została przypisana wszystkim miastom na tej trasie. Jeśli $k \geqslant n\sqrt{2}$, to warunki zadania są więc spełnione. Rozważmy więc przypadek, w którym $k < n\sqrt{2}$. Dla uproszczenia zapisu dalszych rozważań przyjmijmy, że $k = 2\ell + m$, gdzie $\ell \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą oraz $m \in \{0, 1\}$.

Wykażemy, że każdemu miastu przypisano liczbę większą lub równą $\ell + 2$. Rozważmy dowolne miasto M różne od $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Z założeń zadania wiemy, że istnieje trasa rozpoczynająca się miastem M i kończąca się miastem M_1. Niech M_s będzie tym miastem pośród $M_1, M_2, \ldots, M_k$, które pojawia się najwcześniej na owej trasie. Początkowy fragment tej trasy wygląda więc następująco: $M, M_1', M_2', \ldots, M_t', M_s$, przy czym wszystkie miasta $M_1', \ldots, M_t'$ są różne od $M_1, M_2, \ldots, M_k$.



Jeśli $s \leqslant \ell$, to trasa

$$M, M_1', \ldots, M_t', M_s, M_{s+1}, \ldots, M_k$$

ma długość $1 + t + k - s + 1 \geqslant k - s + 2 = 2\ell + m - s + 2 \geqslant \ell + 2$. Jeśli zaś $s \geqslant \ell + 1$, to trasa

$$M, M_1', \ldots, M_t', M_s, M_{s-1}, \ldots, M_1$$

ma długość $1 + t + s \geqslant 1 + s \geqslant \ell + 2$. W obu przypadkach oznacza to, że miastu M przypisano liczbę większą lub równą $\ell + 2$.

Dla dowolnego i oznaczmy przez x_i liczbę miast, którym przypisano liczbę i. Wówczas

$$n^2 = x_{\ell+2} + x_{\ell+3} + \ldots + x_k.$$

Załóżmy nie wprost, że $x_i < n\sqrt{2}$ dla dowolnego i. Z powyższej równości wynika, że

$$n^2 < (k - \ell - 1) \cdot n\sqrt{2} < \frac{k}{2} \cdot n\sqrt{2} < \frac{n\sqrt{2}}{2} \cdot n\sqrt{2} = n^2,$$

sprzeczność. Wobec tego $x_i \geqslant n\sqrt{2}$ dla pewnego i, co kończy dowód.

8. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych mające następującą własność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ będących długościami boków pewnego trójkąta i dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z o sumie 0 zachodzi nierówność

$$W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leqslant 0.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Podstawiając $x = y = 1$, $z = -2$ otrzymujemy, że dla dowolnych a, b, c będących długościami boków trójkąta zachodzi nierówność

$$2W(a) + 2W(b) \geqslant W(c). \qquad (\clubsuit)$$

W szczególności dla $a = b = c$ otrzymujemy $W(a) \geqslant 0$ dla dowolnego $a > 0$.

Wielomian stale równy 0 oczywiście spełnia warunki zadania. Rozważmy niezerowy wielomian $W(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ spełniający warunki zadania. Z tego, że $W(a) \geqslant 0$ dla $a > 0$ wynika w szczególności, że współczynnik wiodący a_n jest dodatni, a wyraz wolny a_0 jest nieujemny. Oznacza to, że jeśli $n \leqslant 1$, to W jest funkcją liniową o nieujemnych współczynnikach.

Dla dowolnego $t > 1$ podstawmy $a = b = t$, $c = 2t - 1$ do zależności $(\clubsuit)$. Otrzymujemy nierówność $4W(t) \geqslant W(2t - 1)$. Jeżeli $n \geqslant 3$, to współczynnik wiodący wielomianu $4W(t) - W(2t - 1)$ jest równy $4a_n - 2^n a_n$, jest więc ujemny. Wówczas $4W(t) - W(2t - 1) < 0$ dla dostatecznie dużych t, sprzeczność. Wobec tego $n \leqslant 2$.

Załóżmy, że $n = 2$. Udowodnimy, że $a_1 \geqslant 0$. Załóżmy przeciwnie: $a_1 < 0$. Podstawiając do $(\clubsuit)$ $a = b = t$, $c = 2t - \varepsilon$, gdzie $t > 1$ i $\varepsilon \in (0, 1)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
4W(t) &\geqslant W(2t - \varepsilon) \\
4(a_2 t^2 + a_1 t + a_0) &\geqslant a_2(2t - \varepsilon)^2 + a_1(2t - \varepsilon) + a_0 \\
4a_2 t^2 + 4a_1 t + 4a_0 &\geqslant 4a_2 t^2 + (-4a_2\varepsilon + 2a_1)t + a_2\varepsilon^2 - a_1\varepsilon + a_0 \\
(2a_1 + 4a_2\varepsilon)t &\geqslant a_2\varepsilon^2 - a_1\varepsilon - 3a_0 \qquad (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Dobierając liczbę $\varepsilon > 0$ tak małą, że $2a_1 + 4a_2\varepsilon < 0$ oraz dostatecznie dużą liczbę t widzimy, że nierówność $(\spadesuit)$ jest nieprawdziwa — sprzeczność. Zatem $a_1 \geqslant 0$.

Dotychczas udowodniliśmy, że jeśli W spełnia warunki zadania, to jest wielomianem stopnia co najwyżej 2 o nieujemnych współczynnikach. Udowodnimy, że wszystkie takie wielomiany spełniają warunki zadania.

Rozważmy dowolny wielomian $W(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, gdzie $a_2, a_1, a_0 \geqslant 0$. Rozważmy dowolne liczby a, b, c będące długościami boków trójkąta oraz dowolne liczby rzeczywiste x, y, z o sumie 0. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy założyć, że liczby x, y są tego samego znaku (tj. obie są nieujemne lub obie są ujemne). Niech $d = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, $e = \frac{1}{2}(a - b + c)$ i $f = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Wówczas $xy \geqslant 0$, $d, e, f > 0$, $a = e + f$, $b = f + d$, $c = d + e$ oraz $z = -(x + y)$. Należy udowodnić, że $W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leqslant 0$, czyli że

$$W(a)y(x + y) + W(b)x(x + y) - W(c)xy \geqslant 0.$$

Mamy

$$W(a)y(x + y) + W(b)x(x + y) - W(c)xy = a_2P + a_1Q + a_0R,$$

gdzie

$$\begin{aligned} P &= a^2y(x + y) + b^2x(x + y) - c^2xy, \\ Q &= ay(x + y) + bx(x + y) - cxy, \\ R &= y(x + y) + x(x + y) - xy. \end{aligned}$$

Wystarczy udowodnić, że $P, Q, R \geqslant 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P &\geqslant e^2(xy + y^2) + d^2(x^2 + xy) - (d + e)^2xy = \\ &= e^2y^2 + d^2x^2 - 2dexy = (dx - ey)^2 \geqslant 0, \\ Q &\geqslant e(xy + y^2) + d(x^2 + xy) - (d + e)xy = \\ &= ey^2 + dx^2 \geqslant 0, \\ R &= x^2 + xy + y^2 = \big(x + \tfrac{1}{2}y\big)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Odpowiedź: Wielomiany postaci $W(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, gdzie $a_2, a_1, a_0 \geqslant 0$.

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających równość $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ zachodzą nierówności

$$2\sqrt{2} \leqslant |a + b + c| + |b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c| \leqslant 4.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Wystarczy dowieść, że

$$8 \leqslant \big(|a + b + c| + |b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c|\big)^2 \leqslant 16.$$

Mamy

$$\big(|a+b+c| + |b+c-a| + |c+a-b| + |a+b-c|\big)^2 = K + 2L,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
K &= |a+b+c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 + |a+b-c|^2 = \\
&= (a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = \\
&= (a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)) + (a^2+b^2+c^2+2(bc-ab-ac)) + \\
&\quad + (a^2+b^2+c^2+2(ac-bc-ab)) + (a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)) = \\
&= 4(a^2+b^2+c^2) = 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= |(a+b+c)(b+c-a)| + |(a+b+c)(c+a-b)| + \\
&\quad + |(a+b+c)(a+b-c)| + |(b+c-a)(c+a-b)| + \\
&\quad + |(b+c-a)(a+b-c)| + |(c+a-b)(a+b-c)| = \\
&= |(b+c)^2-a^2| + |(a+c)^2-b^2| + |(a+b)^2-c^2| + \\
&\quad + |(a-b)^2-c^2| + |(a-c)^2-b^2| + |(b-c)^2-a^2|.
\end{aligned}$$

Wystarczy zatem udowodnić, że $2 \leqslant L \leqslant 6$. Z nierówności trójkąta wynika, że $L \geqslant |M|$, gdzie

$$\begin{aligned}
M &= ((b+c)^2-a^2) + ((a+c)^2-b^2) + ((a+b)^2-c^2) + \\
&\quad + ((a-b)^2-c^2) + ((a-c)^2-b^2) + ((b-c)^2-a^2) = \\
&= 2(a^2+b^2+c^2) = 2.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, z nierówności $|x-y| \leqslant x+y$ słusznej dla $x, y \geqslant 0$ wynika, że

$$\begin{aligned}
L &= (b+c)^2 + a^2 + (a+c)^2 + b^2 + (a+b)^2 + c^2 + \\
&\quad + (a-b)^2 + c^2 + (a-c)^2 + b^2 + (b-c)^2 + a^2 = \\
&= 6(a^2+b^2+c^2) = 6.
\end{aligned}$$

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n mająca co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze większe od 3. Niech $m \geqslant 1$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą warunek $\mathrm{NWD}(m(m+2), n) = 1$. Niech p i q będą dwoma największymi dzielnikami pierwszymi liczby n. Udowodnić, że $mpq \leqslant 5n$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Jest jasne, że $pq \leqslant n$. Zatem jeśli $m \leqslant 5$, to teza zadania jest oczywista.

Załóżmy teraz, że $m \geqslant 6$. Zauważmy, że $\mathrm{NWD}(k(k+2), n) > 1$ dla dowolnego $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Kładąc $k = 1$ i $k = 2$ otrzymujemy $\mathrm{NWD}(3, n) > 1$ i $\mathrm{NWD}(8, n) > 1$, co oznacza, że 2 i 3 dzielą n. Niech $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby n. Wówczas $s \geqslant 4$. Rozważmy liczby

$$k_i = i \cdot p_1 p_2 \ldots p_{s-2} - 1 \quad \text{dla } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Udowodnimy, że $\mathrm{NWD}(k_i(k_i + 2), n) = 1$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyniknie stąd teza zadania, bo wówczas $m \leqslant k_i < 5p_1p_2 \ldots p_{s-2}$, zatem $mpq < 5p_1p_2 \ldots p_s \leqslant 5n$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\mathrm{NWD}(k_i(k_i + 2), n) > 1$ dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ponieważ dla dowolnych $j \in \{1, 2, \ldots, s - 2\}$ oraz $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ liczba p_j dzieli $k_i + 1$, więc $\mathrm{NWD}(p_j, k_i(k_i + 2)) = 1$. W takim razie nierówność $\mathrm{NWD}(k_i(k_i + 2), n) > 1$ może zajść wyłącznie wtedy, gdy p lub q dzieli $k_i(k_i+2)$. Którać z liczb p i q musi dzielić pewne trzy spośród liczb $k_1(k_1+2), k_2(k_2+2), \ldots, k_5(k_5+2)$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania niech będzie to liczba p dzieląca liczby $k_x(k_x + 2)$, $k_y(k_y + 2)$, $k_z(k_z + 2)$ dla parami różnych $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wtedy dla każdego $i \in \{x, y, z\}$ liczba p dzieli k_i lub $k_i + 2$, bo liczba p jest pierwsza. Zatem dla pewnego $t \in \{0, 2\}$ liczba p dzieli któreś dwie spośród liczb k_x+t, k_y+t, k_z+t, bez straty ogólności przyjmijmy, że dzieli $k_x + t$ i $k_y + t$. Wtedy p dzieli ich różnicę, która jest równa

$$(k_x + t) - (k_y + t) = (x - y)p_1p_2 \ldots p_{s-2}.$$

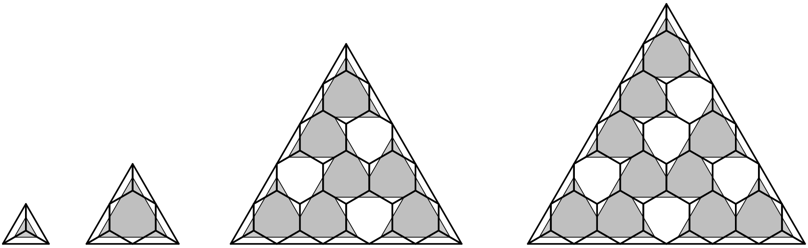
To daje sprzeczność, bo $p \neq p_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, s - 2$ i $p \geqslant 5 > |x - y|$.

11. *Płytką trójkątną* nazwiemy trójkąt o bokach długości $1, 1, \sqrt{3}$, w którym zaznaczono odcinek łączący środki boków o długości 1. *Płytką sześciokątną* nazwiemy sześciokąt foremny o boku długości 1, w którym zaznaczono trzy odcinki łączące środki sąsiednich boków, tak jak przedstawiono to na rysunku.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: z $3n$ płytek trójkątnych i $\frac{1}{2}(n - 1)n$ płytek sześciokątnych można ułożyć trójkąt równoboczny o boku $n\sqrt{3}$ w taki sposób, aby wszystkie zaznaczone odcinki tworzyły jedną łamaną zamkniętą. Płytki można obracać.

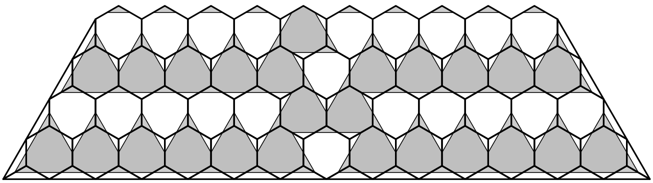
Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Poniższe rysunki przedstawiają przykładowe ustawienia płytek spełniające warunki zadania dla $n = 1, 2, 5, 6$ (na rysunkach zacieniowano wielokąty ograniczone łamanymi zamkniętymi utworzonymi z odcinków narysowanych na płytkach):



Płytkę sześciokątną ustawioną tak jak na rysunku w treści zadania nazwiemy *płytką typu I*. Płytkę powstałą z płytki typu I o obrót o 60° nazwiemy *płytką typu II*.

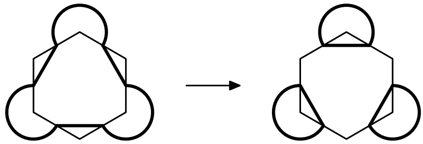
Zauważmy, że dla $n = 5$ i $n = 6$ trzecia od lewej sześciokątna płytka w dolnym rzędzie jest typu I, a pozostałe są typu II. Opiszemy teraz jak układać płytki dla większych n. Załóżmy, że dla pewnego $n = 4k + r$, gdzie $r \in \{1, 2\}$ istnieje ustawienie płytek spełniające warunki zadania i dodatkowo w dolnym rzędzie tego ustawienia $(2k + 1)$-sza płytka sześciokątna jest typu I, a pozostałe — typu II. Modyfikujemy to ustawienie płytek w następujący sposób. Zastępujemy $4k + r$ płytek trójkątnych tworzących dolny bok trójkąta równobocznego następującą kompozycją złożoną z $4k+r+12$ płytek trójkątnych i $16k + 4r + 6$ płytek sześciokątnych:



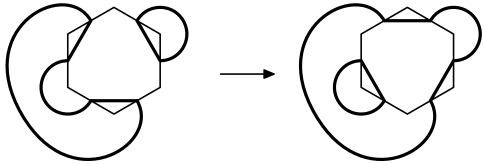
W ten sposób otrzymujemy ustawienie płytek spełniające warunki zadania dla $n = 4(k + 1) + r$, w którego dolnym rzędzie $(4(k + 1) + 1)$-sza płytka sześciokątna jest typu I, a pozostałe są typu II. Z zasady indukcji wynika więc, że liczby dające resztę 1 lub 2 spełniają warunki zadania.

Udowodnimy teraz, że jeśli n spełnia warunki zadania, to n daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4. Rozważmy dowolne ustawienie płytek tworzące trójkąt równoboczny (niekoniecznie spełniające warunki zadania). Wówczas zaznaczone odcinki tworzą pewną liczbę łamanych zamkniętych. Zastanówmy się, jak zmienia się liczba utworzonych łamanych, gdy zamienimy jedną z sześciokątnych płytek typu II na płytkę typu I.

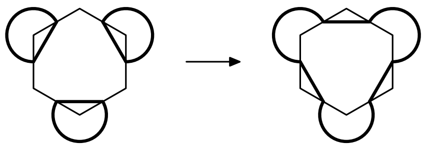
Jeśli środki sześciokąta znajdują się na jednej łamanej, to po zamianie zamiast wyjściowej łamanej powstają trzy łamane.



Jeśli środki sześciokąta znajdują się na dwóch łamanych, to po zamianie zamiast wyjściowych dwóch łamanych powstają dwie inne łamane.



Jeśli środki sześciokąta znajdują się na trzech łamanych, to po zamianie zamiast wyjściowych trzech łamanych powstaje jedna łamana.



We wszystkich przypadkach liczba łamanych nie zmienia swojej parzystości. Wykonując skończoną liczbę takich zamian otrzymujemy sytuację, w której wszystkie płytki są typu I. Wtedy wszystkie łamane składają się z trzech zaznaczonych odcinków i łamanych tych jest dokładnie $\frac{n(n+1)}{2}$. Jeśli możliwe jest ustawienie płytek tak, że utworzona została tylko jedna łamana, to z powyższej dyskusji wynika, że liczba $\frac{n(n+1)}{2}$ jest nieparzysta. Zapiszmy $n = 4k + r$, gdzie $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ i zbadajmy kiedy liczba $\frac{n(n+1)}{2}$ jest nieparzysta. Mamy

$$\frac{4k(4k+1)}{2} = 2k(4k+1), \quad \frac{(4k+1)(4k+2)}{2} = (4k+1)(2k+1),$$

$$\frac{(4k+2)(4k+3)}{2} = (2k+1)(4k+3), \quad \frac{(4k+3)(4k+4)}{2} = 2(4k+3)(k+1),$$

skąd wynika, że $\frac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą nieparzystą tylko gdy $n = 4k + 1$ lub $n = 4k + 2$.

Odpowiedź: Liczby dające resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4.

12. Dany jest czworościan $ABCD$ wpisany w sferę s, której środek leży we wnętrzu tego czworościanu. Punkt I jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Udowodnić, że sfera przechodząca przez środki sfer opisanych na czworościanach $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ jest współśrodkowa z s.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Sposób 1. Oznaczmy środki sfer opisanych na czworościanach $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ odpowiednio przez O_A, O_B, O_C, O_D. Oznaczmy punkty styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ze ścianami BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio przez E, F, G, H. Wówczas płaszczyzna FGH jest prostopadła do prostej AI. Płaszczyzna $O_BO_CO_D$ jest płaszczyzną symetralną odcinka AI, więc także jest do niej prostopadła. W takim razie płaszczyzny FGH i $O_BO_CO_D$ są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że odpowiednie ściany czworościanów $EFGH$, $O_AO_BO_CO_D$ są równoległe. Ponadto te dwa czworościany nie są przystające, więc istnieje jednokładność j przekształcająca punkty E, F, G, H odpowiednio na O_A, O_B, O_C, O_D. Ta jednokładność przekształca punkt I na środek sfery opisanej na czworościanie $O_AO_BO_CO_D$. Niech O będzie środkiem sfery s. Należy udowodnić, że $j(I) = O$.

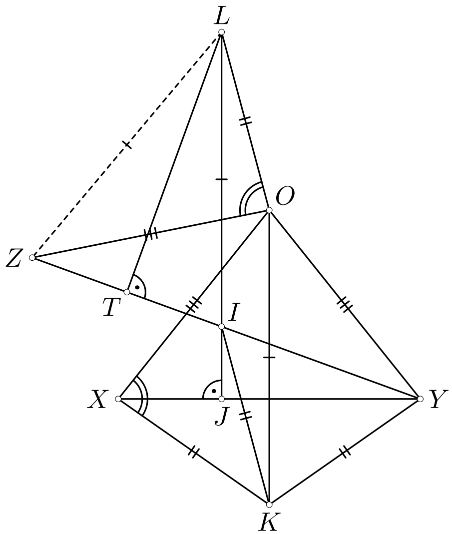
Oznaczmy środek okręgu opisanego na ścianie BCD przez S_A. Zauważmy, że punkty O, O_A wyznaczają prostą prostopadłą do płaszczyzny BCD przechodzącą przez S_A. Zauważmy też, że prosta IE jest prostopadła do płaszczyzny BCD. To oznacza, że proste IE, OO_A są równoległe. Stąd i z faktu, że $j(E) = O_A$ wynika, że jednokładność j przeprowadza prostą IE na prostą OO_A. W rezultacie punkt $j(I)$ leży na prostej OO_A. Analogicznie dowodzimy, że $j(I)$ leży na prostej OO_B, co oznacza, że $j(I)$ jest punktem przecięcia prostych OO_A, OO_B. Stąd $j(I) = O$, co było do udowodnienia.

Sposób 2. Oznaczmy sferę opisaną na czworościanie $IBCD$ przez σ, a jej środek przez K. Sfery s i σ przecinają się wzdłuż okręgu opisanego na trójkącie BCD. Oznaczmy ten okrąg przez o. Niech O będzie środkiem sfery s. Rozważmy płaszczyznę π przechodzącą przez punkty I, O, K (może zdarzyć się, że takich płaszczyzn jest wiele (gdy punkty I, O, K są współliniowe) — wtedy rozważamy dowolną z nich). Ta płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny BCD, gdyż zawiera prostą OK, która jest prostopadła do płaszczyzny BCD. Niech X, Y będą punktami przecięcia π z o. Niech J będzie rzutem prostokątnym I na ścianę BCD. Niech Z będzie drugim punktem przecięcia prostej IY ze sferą s. Zauważmy, że punkty O, I, J, K, X, Y, Z leżą na płaszczyźnie π, J jest rzutem prostokątnym I na XY, punkty X, I, Y leżą na okręgu będącym przecięciem π ze sferą σ (ten okrąg ma więc środek K), a punkty X, Y, Z leżą na okręgu będącym przecięciem π z s (ten okrąg ma więc środek O). Z zależności między kątami środkowym i wpisanym opartymi na tym samym łuku mamy $\sphericalangle ZOX = 2\sphericalangle ZYX = 2\sphericalangle IYX = \sphericalangle IKX$. Niech L będzie takim punktem, że czworokąt $KILO$ jest równoległobokiem. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle LOZ = \sphericalangle LOK - \sphericalangle ZOX - \sphericalangle XOK = \\ = 180^\circ - \sphericalangle OKI - \sphericalangle IKX - \sphericalangle XOK = \\ = \sphericalangle KXO.\end{aligned}$$

Ponadto $LI = OK$ i $OL = KI = KX$. Z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika, że trójkąty LOZ i KXO są przystające. W szczególności $LZ = OX$. Niech T będzie środkiem odcinka IZ. Wtedy trójkąt ITL jest prostokątny, bo $LZ = LI$. Trójkąty prostokątne LIT, JIY są podobne, bo ich kąty przy wierzchołku I są równe (kąty wierzchołkowe). Stąd $\frac{LI}{IT} = \frac{IY}{IJ}$ i wobec tego

$$OK = LI = \frac{IT \cdot IY}{IJ} = \frac{IY \cdot IZ}{2IJ}.$$



Analogicznie, oznaczmy sferę opisaną na czworościanie $IABC$ przez σ', jej środek przez K', płaszczyznę przechodzącą przez punkty O, I, K' przez π', okrąg przecięcia sfer s i σ' przez o', punkty przecięcia π' z o' przez X', Y', przecięcie IY' z s przez Z' oraz rzut I na ścianę ABC przez J'. Powtarzając powyższy argument otrzymujemy wzór

$$OK' = \frac{IY' \cdot IZ'}{2IJ'}.$$

Jednakże $IY \cdot IZ = IY' \cdot IZ'$ na mocy twierdzenia o siecznych, oraz $IJ = IJ'$, gdyż oba te odcinki mają taką samą długość jak promień sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. To pokazuje, że $OK = OK'$. Analogicznie dowodzimy, że środki sfer opisanych na czworościanach $ICDA$, $IDAB$ leżą w odległości OK od punktu O. To dowodzi tezy zadania.

Uwaga. Długość odcinka OK można obliczyć w inny sposób. Przyjmijmy oznaczenia punktów jak w rozwiązaniu i niech M będzie środkiem odcinka XY. Niech $IJ = r$ i $OX = R$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$\begin{aligned} OI^2 &= JM^2 + (OM - IJ)^2 \\ JM^2 + (MK + IJ)^2 &= IK^2 \\ OM^2 + MX^2 &= OX^2 \\ KX^2 &= XM^2 + KM^2 \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami tych równości i skróceniu równych składników występujących po obu stronach otrzymujemy zależność

$$2rTK + OI^2 = R^2 - 2rOT,$$

z której wynika, że $OK = \dfrac{R^2 - OI^2}{2r}$.