LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

29 marca 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest taki ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych k, ℓ liczba $a_k + a_\ell$ dzieli się przez $k + \ell$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $k > \ell$ liczba $a_k - a_\ell$ dzieli się przez $k - \ell$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne dodatnie liczby całkowite $k > \ell$. Zauważmy, że dla dowolnego m zachodzi równość

$$a_k - a_\ell = (a_k + a_m) - (a_m + a_\ell).$$

Wystarczy dobrać liczbę m w taki sposób, by liczby $a_k + a_m$ i $a_m + a_\ell$ były podzielne przez $k - \ell$. Z założeń zadania wynika, że liczba $a_k + a_m$ dzieli się przez $k + m$, a liczba $a_m + a_\ell$ dzieli się przez $m + \ell$. Wystarczy więc dobrać liczbę m tak, aby liczby $k + m$ i $m + \ell$ były podzielne przez $k - \ell$. Połóżmy $m = (k+1)(k-\ell) - k$. Wówczas $m > 0$, $k + m = (k+1)(k-\ell)$ oraz $m + \ell = k(k-\ell)$. Tak dobrana liczba m spełnia więc omówione wyżej warunki dające tezę zadania.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Punkt X leży na odcinku BC po tej samej stronie prostej AI, co punkt B. Punkt Y leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC. Spełnione są przy tym równości kątów

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle XYA = 120^\circ.$$

Dowieść, że prosta YI jest dwusieczną kąta XYA.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Niech M będzie środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wówczas M leży na prostej AI. Z lematu o trójliściu wynika, że $BM = CM = IM$.

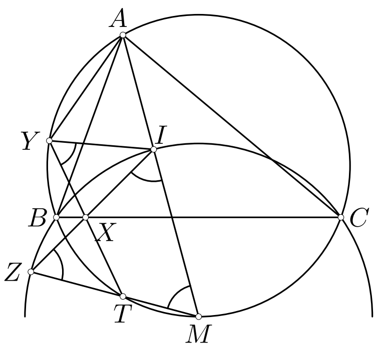
Zbudujmy trójkąt równoboczny IMZ po tej stronie prostej IM, po której leży punkt X. Wtedy X leży na prostej IZ, bo

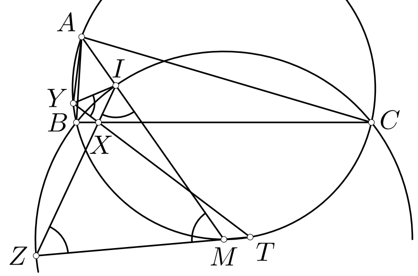
$$\sphericalangle ZIM = 60^\circ = \sphericalangle XIM.$$

Oznaczmy punkt przecięcia prostych XY i MZ przez T. Mamy $\sphericalangle XYA = 120^\circ$ i $\sphericalangle AMZ = 60^\circ$. Wynika stąd, że T leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC: jeśli T leży po tej samej stronie prostej AM co Y, to przeciwległe kąty czworokąta $AMTY$ sumują się do kąta półpełnego, a jeśli T leży po drugiej stronie tej prostej, to $\sphericalangle TMA = \sphericalangle TYA = 120^\circ$ oraz punkty Y i M leżą po tej samej stronie prostej AT. Jeśli zaś T leży na prostej AM, to pokrywa się z M. Zauważmy jeszcze, że punkty Z, B, I, C leżą na okręgu o środku M. Z twierdzenia o siecznych wynika, że $XZ \cdot XI = XB \cdot XC = XY \cdot XT$. Stąd

$$\frac{XI}{XY} = \frac{XT}{XZ}.$$

Ponadto $\sphericalangle IXY = \sphericalangle ZXT$. Z cechy podobieństwa bkb wynika, że trójkąty IXY i TXZ są podobne. Zatem $\sphericalangle XYI = \sphericalangle TZI = 60^\circ$, skąd wynika teza.





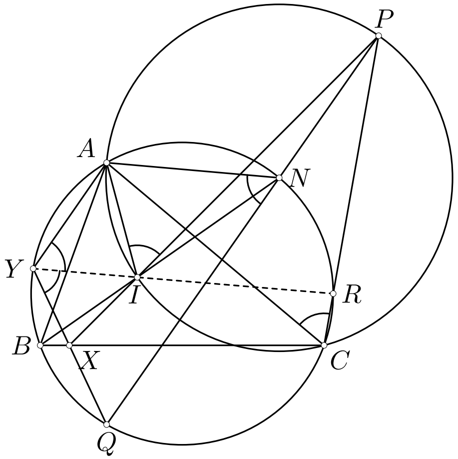
Sposób 2. Oznaczmy przez Ω okrąg opisany na trójkącie ABC. Niech N będzie środkiem krótszego łuku AC okręgu Ω. Niech ω będzie okręgiem o środku N przechodzącym przez I. Z lematu o trójliściu wynika, że punkty A i C leżą na ω. Niech P będzie różnym od I punktem

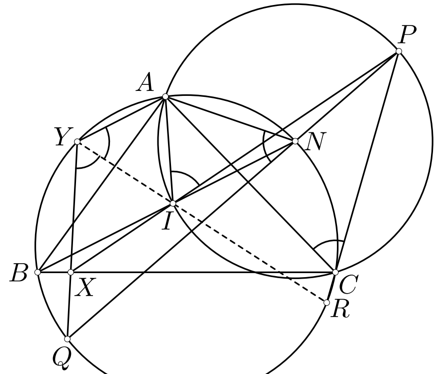
przecięcia ω i prostej XI. Z zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym opartych na tym samym łuku mamy $\sphericalangle PNA = 2\cdot\sphericalangle PIA$, więc

$$\sphericalangle PNA = 2\cdot\sphericalangle PIA = 2\cdot(180^\circ - \sphericalangle AIX) = 120^\circ.$$

Niech Q będzie punktem przecięcia prostych PN i XY. Wówczas $\sphericalangle ANQ = 180^\circ - \sphericalangle PNA = 60^\circ$ i wobec tego przeciwległe kąty czworokąta $QYAN$ sumują się do kąta półpełnego. W konsekwencji czworokąt ten można wpisać w okrąg, skąd wniosek, że punkt Q leży na okręgu Ω.

Niech R będzie środkiem dłuższego łuku AQ okręgu Ω. Wówczas $AR = QR$ oraz $\sphericalangle ARQ = 180^\circ - \sphericalangle QYA = 60^\circ$, więc trójkąt AQR jest równoboczny. Należy udowodnić, że punkt I leży na prostej YR, bo $\sphericalangle XYR = 60^\circ = \sphericalangle RYA$. Udowodnimy najpierw, że punkt R leży na prostej PC. Jeśli R leży wewnątrz okręgu ω, to $\sphericalangle RCA = 60^\circ = \sphericalangle PCA$, a jeśli R leży na zewnątrz okręgu ω, to $\sphericalangle ACR = 120^\circ = 180^\circ - \sphericalangle PCA$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $R = C$, to prosta CP jest styczna do Ω, gdyż $\sphericalangle PCA = 60^\circ = \sphericalangle RQA$.

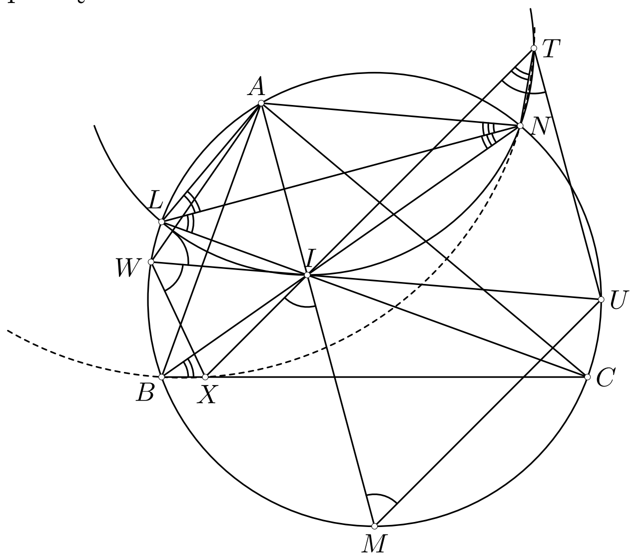




Z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $BCRYQN$ wynika, że punkty X, P oraz przecięcie prostych BN, YR są współliniowe. To oznacza, że przecięcie prostych XP i BN, czyli punkt I, leży na prostej RY. To kończy dowód.

Sposób 3. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech L, M, N będą odpowiednio środkami krótszych łuków AB, BC i AC okręgu Ω. Wówczas proste AM, BN, CL są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC, więc przechodzą przez I.

Czworokąt $ALIN$ jest deltoidem, gdyż $\sphericalangle ILN = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \sphericalangle NLA$ oraz $\sphericalangle ANL = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle LNI$. W konsekwencji okrąg opisany na trójkącie LNI, który oznaczymy przez Ω', jest symetryczny do Ω względem prostej LN. Te okręgi są więc przystające. Oznaczmy środki okręgów Ω i Ω' odpowiednio przez O i O'. Wówczas $OO' \perp LN$ i okrąg Ω powstaje z okręgu Ω' przez przesunięcie o wektor $\overrightarrow{O'O}$. Wynika stąd, że $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{O'O}$, gdyż M jest jedynym punktem wspólnym okręgu Ω i półprostej o początku I i kierunku $\overrightarrow{O'O}$.



Niech T będzie różnym od I punktem przecięcia prostej XI i okręgu Ω'. Niech U będzie takim punktem, że $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{O'O}$. Wówczas U leży na Ω, a czworokąt $MITU$ jest równoległobokiem. Niech W będzie różnym od U punktem przecięcia okręgu Ω i prostej UI. Zauważmy, że

$$\sphericalangle ITN = \sphericalangle ILN = \sphericalangle XBI$$

oraz punkty B, T leżą po tej samej stronie prostej XN, więc czworokąt $BXNT$ jest wpisany w okrąg. Z twierdzenia o siecznych wynika, że

$$XI\cdot TI = BI\cdot NI = UI\cdot WI.$$

Stąd $\frac{WI}{XI} = \frac{TI}{UI}$. Ponadto trójkąty WIX i TIU mają równe kąty przy wierzchołku I, więc z cechy podobieństwa bkb wynika, że trójkąty te są podobne. Stąd $\sphericalangle XWI = \sphericalangle ITU$. Korzystając z tego, że $TU \parallel IM$

otrzymujemy

$$\sphericalangle XWI = \sphericalangle ITU = \sphericalangle XIM = 180^\circ - \sphericalangle AIX = 60^\circ.$$

Ponadto

$$\sphericalangle UWA = \sphericalangle UMA = \sphericalangle XIM = 60^\circ.$$

Stąd wniosek, że $\sphericalangle XWA = \sphericalangle XWI + \sphericalangle IWA = 120^\circ$ oraz WI jest dwusieczną kąta XWA. Pozostaje zauważyć, że $W = Y$, gdyż istnieje tylko jeden punkt $\tilde{Y}$ na okręgu Ω spełniający równość $\sphericalangle X\tilde{Y}A = 120^\circ$.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dane są też liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z przedziału $[0,1]$. Udowodnić, że istnieją takie liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0,1\}$, że dla dowolnych $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{i=k}^{\ell}(a_i - b_i)\right| \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Symbolem $\{x\}$ będziemy oznaczać część ułamkową liczby rzeczywistej x, czyli taką liczbę y, że $x - y$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x. Rozważmy liczby

$$\{a_1\}, \{a_1 + a_2\}, \ldots, \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}.$$

Dzielą one przedział $(0,1)$ na co najwyżej $n+1$ mniejszych przedziałów. Jeden z nich musi mieć więc długość równą co najmniej $\frac{1}{n+1}$. W szczególności istnieje taka liczba t, że $0 \leqslant t \leqslant \frac{n}{n+1}$ i przedział otwarty $(t, t+\frac{1}{n+1})$ nie zawiera żadnej z wyżej wypisanych części ułamkowych.

Niech $a_0 = \frac{n}{n+1} - t$ oraz $b_0 = 0$. Udowodnimy, że można dobrać liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0,1\}$ tak, aby dla wszystkich $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i) \leqslant \frac{n}{n+1}. \qquad (*)$$

Rozumujemy przez indukcję względem k. Dla $k = 0$ żądana nierówność jest prawdziwa ponieważ $a_0 - b_0 = \frac{n}{n+1} - t$. Krok indukcyjny: załóżmy, że $0 \leqslant k < n$ oraz że liczby $b_0, b_1, \ldots, b_k$ są już zdefiniowane. Wówczas

$$\sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i) + a_{k+1} \geqslant \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i) \geqslant 0.$$

Jeśli suma $\sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i) + a_{k+1}$ nie przekracza $\frac{n}{n+1}$, to przyjmujemy $b_{k+1} = 0$ i wówczas warunek $(*)$ jest spełniony. W przeciwnym razie definiujemy $b_{k+1} = 1$. Wówczas

$$\sum_{i=0}^{k+1}(a_i - b_i) = \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i) + a_{k+1} - 1 \leqslant \frac{n}{n+1} - (1 - a_{k+1}) \leqslant \frac{n}{n+1}$$

oraz

$$\sum_{i=0}^{k+1}(a_i - b_i) = \sum_{i=0}^{k}(a_i - b_i) + a_{k+1} - 1 > \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}.$$

Należy wykluczyć możliwość $0 > \sum_{i=0}^{k+1}(a_i - b_i) > -\frac{1}{n+1}$. Gdyby tak było, to

$$t + \frac{1}{n+1} > \sum_{i=1}^{k+1}(a_i - b_i) + 1 > t.$$

W szczególności liczba $\sum_{i=0}^{k+1}(a_i - b_i) + 1$ byłaby w przedziale $(0,1)$, a ponadto różniłaby się od liczby $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}$ o liczbę całkowitą. Stąd otrzymalibyśmy, że część ułamkowa liczby $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}$ jest w przedziale $(t, t + \frac{1}{n+1})$ — sprzeczność z wyborem liczby t. Stąd $\sum_{i=0}^{k+1}(a_i - b_i) \geqslant 0$, co oznacza, że własność $(*)$ jest prawdziwa. To kończy indukcyjną definicję liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Powyżej zdefiniowane liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają warunki zadania, gdyż dla dowolnych $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ wartość bezwzględna liczby

$$\sum_{i=k}^{\ell}(a_i - b_i) = \sum_{i=0}^{\ell}(a_i - b_i) - \sum_{i=0}^{k-1}(a_i - b_i)$$

nie przekracza $\frac{n}{n+1}$, bo jest różnicą dwóch liczb z przedziału $[0, \frac{n}{n+1}]$.

LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

30 marca 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o sumie równej 1. Niech $b = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$. Udowodnić, że

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)^2 a_i a_j \leqslant (n-b)(b-1).$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(n-b)(b-1) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(n-i)a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)a_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n-i)(j-1)a_i a_j.\end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie jest równe

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)(i-1)a_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}((n-i)(j-1) + (n-j)(i-1))a_i a_j. \quad (*)$$

Współczynnik stojący przy a_i^2 jest nieujemny dla $i = 1, 2, \ldots, n$, więc możemy oszacować $(n-b)(b-1)$ z dołu przez drugą sumę występującą w wyrażeniu $(*)$. Do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że współczynnik stojący w tej sumie przy $a_i a_j$ jest równy co najmniej $(j-i)^2$. Mamy

$$\begin{aligned}(n-i)(j-1) + (n-j)(i-1) &\geqslant (j-i)(j-1) + (i-j)(i-1) \\ &= (j-i)((j-1) - (i-1)) \\ &= (j-i)^2,\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Uwaga. Nierówność z zadania staje się równością wtedy i tylko wtedy gdy $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2023$. Dla dowolnej liczby całkowitej x symbolem $r(x)$ oznaczymy resztę z dzielenia liczby x przez p. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_m$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi mniejszymi od $\sqrt[4]{\frac{1}{2}p}$. Załóżmy, że $q_1, q_2, \ldots, q_m$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczby $p_1q_1 - 1, p_2q_2 - 1, \ldots, p_mq_m - 1$ są podzielne przez p. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $0 < a, b < p$ zbiory

$$\{r(q_1), r(q_2), \ldots, r(q_m)\}, \quad \{r(aq_1 + b), r(aq_2 + b), \ldots, r(aq_m + b)\}$$

mają co najwyżej trzy wspólne elementy.

Autor zadania: Mikołaj Leonarski

Rozwiązanie:

Zauważmy, że liczby $r(q_1)$, $r(q_2)$, …, $r(q_m)$ są parami różne. Rzeczywiście, jeśli $r(q_i) = r(q_j)$, to $q_i \equiv q_j \pmod{p}$. Po pomnożeniu przez p_ip_j i skorzystaniu z tego, że $p_iq_i \equiv 1 \equiv p_jq_j \pmod{p}$ dostajemy $p_i \equiv p_j \pmod{p}$. To jednak oznacza, że $p_i = p_j$, bo $0 < p_i, p_j < p$, skąd $i = j$.

Podobnie, liczby $r(aq_1+b)$, $r(aq_2+b)$, …, $r(aq_m+b)$ są parami różne: jeśli $r(aq_i+b) = r(aq_j+b)$, to $aq_i+b \equiv aq_j+b \pmod{p}$, skąd $a(q_i-q_j) \equiv 0 \pmod{p}$ i skoro $0 < a < p$, to $q_i - q_j \equiv 0 \pmod{p}$ i $r(q_i) = r(q_j)$.

Zauważmy, że $r(q_i) = r(aq_i + b)$ dla co najwyżej jednego indeksu i. Rzeczywiście, to jest równoważne kongruencji $q_i \equiv aq_i + b \pmod{p}$. Jeśli $a = 1$, to takie i w ogóle nie istnieje, bo wymuszałoby to $b \equiv 0 \pmod{p}$, a jeśli $1 < a < p$, to dana kongruencja jest równoważna $q_i \equiv bc \pmod{p}$, gdzie c jest taką liczbą, że $(1-a)c \equiv 1 \pmod{p}$. To jest równoważne $r(q_i) = r(bc)$, co oznacza, że potencjalny indeks i, który mógłby spełniać tę równość jest wyznaczony jednoznacznie.

Załóżmy nie wprost, że zbiory z zadania mają co najmniej cztery wspólne elementy. Wówczas dla pewnych parami różnych i_1, i_2, i_3, i_4 oraz pewnych j_1, j_2, j_3, j_4 mamy $r(q_{i_k}) = r(aq_{j_k}+b)$ dla $k = 1, 2, 3, 4$. Wówczas również j_1, j_2, j_3, j_4 są parami różne. Na mocy obserwacji z poprzedniego akapitu możemy bez ograniczenia ogólności rozumowania założyć, że $i_k \neq j_k$ dla $k = 1, 2, 3$.

Mamy $q_{i_1} \equiv aq_{j_1} + b \pmod{p}$ i $q_{i_2} \equiv aq_{j_2} + b \pmod{p}$, skąd

$$q_{i_1} - q_{i_2} \equiv a(q_{j_1} - q_{j_2}) \pmod{p}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$q_{i_1} - q_{i_3} \equiv a(q_{j_1} - q_{j_3}) \pmod{p}.$$

Wobec tego

$$(q_{i_1}-q_{i_2})(q_{j_1}-q_{j_3}) \equiv a(q_{j_1}-q_{j_2})(q_{j_1}-q_{j_3}) \equiv (q_{i_1}-q_{i_3})(q_{j_1}-q_{j_2}) \pmod{p}.$$

Mnożąc tę kongruencję przez $p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}$ i wykorzystując to, że $p_iq_i \equiv 1 \pmod{p}$ dla dowolnego i otrzymujemy

$$p_{i_3}p_{j_2}(p_{i_2} - p_{i_1})(p_{j_3} - p_{j_1}) \equiv p_{i_2}p_{j_3}(p_{i_3} - p_{i_1})(p_{j_2} - p_{j_1}) \pmod{p}.$$

Wartości bezwzględne liczb stojących po obu stronach tej kongruencji są mniejsze od $\frac{1}{2}p$, gdyż z założeń zadania $p_i < \sqrt[4]{\frac{1}{2}p}$ dla każdego i. Te dwie liczby różnią się więc o nie więcej niż p i dają taką samą resztę z dzielenia przez p, więc są równe. Zatem

$$p_{i_3}p_{j_2}(p_{i_2} - p_{i_1})(p_{j_3} - p_{j_1}) = p_{i_2}p_{j_3}(p_{i_3} - p_{i_1})(p_{j_2} - p_{j_1}).$$

Ponieważ liczba pierwsza p_{i_3} nie jest dzielnikiem żadnej z liczb p_{i_2}, p_{j_3}, $p_{i_3} - p_{i_1}$, więc jest dzielnikiem liczby $p_{j_2} - p_{j_1}$. W szczególności

$$p_{i_3} \leqslant |p_{j_2} - p_{j_1}| < \max\{p_{j_1}, p_{j_2}\} \leqslant \max\{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}\}.$$

Analogicznie dowodzimy, że każda z liczb $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}$ jest mniejsza od $\max\{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}\}$. To daje sprzeczność, bo wśród dowolnych sześciu liczb istnieje największa.

6. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a i dowolnego $b > 0$ *rozszerzeniem* przedziału domkniętego $[a-b, a+b] \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy przedział domknięty $[a-2b, a+2b]$. Powiemy, że przedziały $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *pokrywają* zbiór X, jeśli $X \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$.

Udowodnić, że istnieje liczba całkowita M o następującej własności: dla dowolnego skończonego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$ składający się z co najwyżej M liczb, że dla dowolnych stu przedziałów pokrywających zbiór B ich rozszerzenia pokrywają zbiór A.

Autorzy zadania: Katarzyna Kowalska i Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Udowodnimy przez indukcję ze względu na $k = 1, 2, 3, \ldots$ następujące zdanie:

$\Phi(k)$: Dla dowolnego niepustego skończonego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$ zawierający $\min A$ i $\max A$ i składający się z co najwyżej $2 \cdot 3^{k-1}$ liczb, że dla dowolnych k przedziałów pokrywających zbiór B ich rozszerzenia pokrywają zbiór A.

Jeśli A jest zbiorem jednoelementowym, to zbiór $B = A$ spełnia żądane warunki. Od teraz zakładamy, że A ma co najmniej dwa elementy.

Dla $k = 1$ przyjmujemy $B = \{\min A, \max A\}$. Wówczas dowolny przedział pokrywający B pokrywa także A, a więc jego rozszerzenie tym bardziej pokrywa A.

Załóżmy teraz, że zdanie $\Phi(k)$ jest prawdziwe dla pewnego $k \geqslant 1$. Udowodnimy zdanie $\Phi(k+1)$. Rozważmy dowolny skończony podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ o co najmniej dwóch elementach. Niech $x = \min A$ i $y = \max A$. Podzielmy przedział $[x, y]$ na trzy części:

$$P_1 = \left[x, \frac{2x+y}{3}\right], \quad P_2 = \left[\frac{2x+y}{3}, \frac{x+2y}{3}\right], \quad P_3 = \left[\frac{x+2y}{3}, y\right].$$

Oznaczmy $A_1 = A \cap P_1$, $A_2 = A \cap P_2$ i $A_3 = A \cap P_3$. Ze zdania $\Phi(k)$ wynika, że dla $i = 1, 2, 3$ istnieje taki zbiór $B_i \subseteq A_i$ mający co najwyżej $2 \cdot 3^{k-1}$ elementów, że jeśli k przedziałów pokrywa zbiór B_i, to ich rozszerzenia pokrywają zbiór A_i, a ponadto $x \in B_1$ i $y \in B_3$. Oznaczmy $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Wówczas B ma co najwyżej $2 \cdot 3^k$ elementów i zawiera x i y. Udowodnimy, że jeśli $k+1$ przedziałów pokrywa zbiór B, to ich rozszerzenia pokrywają zbiór A.

Rozważmy dowolne $k+1$ przedziałów $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$ pokrywających zbiór B. Jeżeli dla każdego $i = 1, 2, 3$ zbiór B_i jest pokryty przez nie więcej niż k przedziałów spośród $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$, to ich rozszerzenia pokrywają zbiór A_i; w konsekwencji zbiór A jest pokryty przez rozszerzenia $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$.

W przeciwnym razie któryś ze zbiorów B_1, B_2, B_3 niepusto przecina się z każdym z przedziałów $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$. Jeśli B_1 jest takim zbiorem, to rozważmy przedział Q_i, który zawiera y. Ze względu na to, że Q_i zawiera jakiś element zbioru B_1, przedział Q_j zawiera przedział $P_2 \cup P_3$. Stąd jego rozszerzenie pokrywa przedział $[x, y]$ i w szczególności pokrywa zbiór A. Analogicznie dowodzimy, że jeśli B_3 niepusto przecina się z każdym z przedziałów $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$, to przedział Q_j zawierający x pokrywa $P_1 \cup P_2$, więc jego rozszerzenie pokrywa $[x,y]$ i w szczególności pokrywa A.

Pozostał przypadek, w którym B_2 przecina się niepusto z każdym z przedziałów $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$. Rozważmy przedział Q_i zawierający y oraz przedział Q_j zawierający x. Wówczas Q_i pokrywa przedział P_3, a przedział Q_j pokrywa przedział P_1. Ich rozszerzenia pokrywają odpowiednio przedziały $[\frac{x+y}{2}, y]$ oraz $[x, \frac{x+y}{2}]$. Stąd rozszerzenia przedziałów Q_i i Q_j pokrywają $[x,y]$ i w konsekwencji pokrywają A. To dowodzi prawdziwości zdania $\Phi(k+1)$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej zdanie $\Phi(k)$ jest prawdziwe dla dowolnego $k \geqslant 1$. Ze zdania $\Phi(100)$ wynika, że liczba $M = 2 \cdot 3^{99}$ spełnia warunki zadania.