LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

30 marca 2022 r. (pierwszy dzień zawodów)

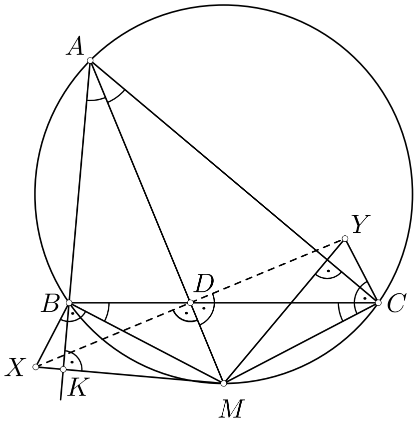
1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M różnym od A. Punkty X i Y wybrano tak, że $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$ oraz $CY \perp MC$. Dowieść, że punkty X, D, Y leżą na jednej prostej.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech K będzie rzutem punktu M na prostą AB. Wtedy BK jest wysokością w trójkącie prostokątnym MBX. Trójkąty prostokątne MBX i MKB mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku M, więc są podobne. Stąd $\frac{MB}{MX} = \frac{MK}{MB}$.

Oznaczmy $\sphericalangle BAC = 2\alpha$. M jest środkiem łuku BC, więc kąty oparte na łukach BM i MC mają miarę α. Zatem $\sphericalangle MBD = \alpha = \sphericalangle BAM$. Trójkąty MDB i MBA mają też wspólny kąt przy wierzchołku M, więc są podobne na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt. Stąd $\frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MA}$.



Mnożąc otrzymane równości stosunków otrzymujemy $\frac{MD}{MX} = \frac{MK}{MA}$. Trójkąty MDX i MKA mają wspólny kąt przy wierzchołku M. Z cechy podobieństwa bok-kąt-bok wynika, że trójkąty te są podobne. W szczególności $\sphericalangle XDM = \sphericalangle MKA = 90°$.

W podobny sposób dowodzimy, że $\sphericalangle MDY = 90°$. W takim razie $\sphericalangle XDY = \sphericalangle XDM + \sphericalangle MDY = 180°$, co dowodzi tezy.

2. Dane są liczby całkowite $m, n \geqslant 2$. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leqslant i < j \leqslant m$ liczba $\dfrac{a_j}{a_j - a_i}$ jest całkowita i podzielna przez n.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Rosnący ciąg liczb całkowitych (niekoniecznie dodatnich) $a_1, a_2, \ldots, a_t$ będziemy nazywać ciągiem *dobrym*, jeśli dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant t$ liczba $\dfrac{a_j}{a_j - a_i}$ jest całkowita i podzielna przez n.

Obserwacja. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_t$ jest dobry. Wtedy:

(i) jeśli $a_t < 0$, to ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_t, 0$ jest dobry;

(ii) ciąg $a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_t + x$ jest dobry o ile liczba całkowita x dzieli się przez $n \cdot \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant t} (a_j - a_i)$.

Część (i) obserwacji jest oczywista. Część (ii) wynika z tego, że jeśli $x = yn \cdot \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant t} (a_j - a_i)$ dla pewnej liczby całkowitej y, to dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant t$ liczba

$$\frac{a_j + x}{(a_j + x) - (a_i + x)} = \frac{a_j}{a_j - a_i} + yn \cdot \prod_{\substack{1 \leqslant k < \ell \leqslant t \\ (k,\ell) \neq (i,j)}} (a_\ell - a_k)$$

jest całkowita i dzieli się przez n.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na m. Dla $m = 2$ wystarczy wziąć $a_1 = n - 1$, $a_2 = n$.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jest dobry i $a_1 > 0$. Należy skonstruować dobry ciąg długości $m + 1$ o wyrazach dodatnich. Niech x będzie wielokrotnością liczby $n \cdot \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (a_j - a_i)$ tak dużą, że $x > a_m$. Wtedy ciąg

$$a_1 - x, a_2 - x, \ldots, a_m - x$$

jest dobry i ma ujemne wyrazy. Dopisując na końcu tego ciągu wyraz 0 otrzymujemy dobry ciąg

$$a_1 - x, a_2 - x, \ldots, a_m - x, 0$$

długości $m+1$. Niech

$$y = n \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (a_j - a_i) \cdot \prod_{k=1}^{m} (x - a_k).$$

Wtedy $y > x - a_1$. Zatem ciąg

$$a_1 - x + y, a_2 - x + y, \ldots, a_m - x + y, y$$

jest dobry, ma dodatnie wyrazy i jest długości $m+1$. To kończy krok indukcyjny i rozwiązanie zadania.

3. Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano pewną liczbę cięciw o obu końcach w zaznaczonych punktach. Spełniona jest przy tym następująca własność: po wymazaniu dowolnych 2021 z narysowanych cięciw dowolne dwa zaznaczone punkty można połączyć łamaną złożoną z niewymazanych cięciw. Udowodnić, że można wymazać niektóre z cięciw w taki sposób, że na rysunku zostanie co najwyżej $2022n$ cięciw oraz wyżej opisana własność zostanie zachowana.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie:

Powiemy, że niepusty spójny graf jest *wspaniały*, jeśli pozostaje on spójny po usunięciu z niego dowolnych 2021 krawędzi. Należy udowodnić, że z każdego wspaniałego grafu o n wierzchołkach można usunąć część jego krawędzi tak, żeby powstały graf pozostał wspaniały i miał co najwyżej $2022n$ krawędzi.

Ustalmy wspaniały graf G o n wierzchołkach. Niech V będzie jego zbiorem wierzchołków. Skonstruujmy grafy G_0, F_0, G_1, F_1, $\ldots$, F_{2021}, G_{2022}, każdy o zbiorze wierzchołków V, w następujący sposób. Niech $G_0 = G$. Jeśli graf G_i jest już skonstruowany, to definiujemy F_i jako dowolny las rozpinający G_i (to znaczy: dla każdej spójnej składowej grafu G_i znajdujemy drzewo rozpinające i deklarujemy, że krawędziami grafu F_i są krawędzie tychże drzew). Jeśli graf F_i jest już skonstruowany, to określamy G_{i+1} jako graf, którego krawędziami są te krawędzie grafu G_i, które nie są krawędziami grafu F_i. Zdefiniujmy jeszcze graf H o zbiorze wierzchołków V, którego krawędziami są krawędzie grafów $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{2021}$. Udowodnimy, że H jest wspaniały i ma mniej niż $2022n$ krawędzi.

Oczywiście, każdy z grafów $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{2021}$ ma co najwyżej $n-1$ krawędzi, więc H ma co najwyżej $2022(n-1)$ krawędzi. Do sprawdzenia zostaje wspaniałość grafu H. Niech Z będzie zbiorem dowolnych 2021 krawędzi grafu H. Niech H' będzie grafem powstałym z H przez usunięcie krawędzi ze zbioru Z. Należy dowieść, że H' jest spójny.

Lemat. Jeśli wierzchołki u, v są w tej samej składowej spójności grafu G_{2022}, to są w tej samej składowej spójności grafu H'.

Dowód lematu. Ponieważ G_{2022} jest podgrafem grafów $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_{2021}$, więc dla dowolnego $i = 0, 1, 2, \ldots, 2021$ wierzchołki u, v są w tej samej składowej spójności grafu G_i. Ponieważ F_i jest lasem rozpinającym G_i, możemy znaleźć ścieżkę p_i w F_i łączącą u z v. Ścieżki $p_0, p_1, \ldots, p_{2021}$ są krawędziowo rozłączne, bo grafy F_i są krawędziowo rozłączne. Ponieważ mamy 2022 ścieżek, a Z ma 2021 krawędzi, któraś ze ścieżek, powiedzmy p_j, składa się wyłącznie z krawędzi nienależących do Z. Ta ścieżka łączy u z v i jest zawarta w H' — wierzchołki u, v są więc w tej samej składowej spójności grafu H', co kończy dowód lematu.

Uzbrojeni w lemat dokończymy rozwiązanie. Niech $E(G)$ będzie zbiorem krawędzi grafu G. Zauważmy, że $E(G)$ możemy podzielić na trzy zbiory: zbiór krawędzi grafu G_{2022}, który oznaczymy przez $E(G_{2022})$, zbiór krawędzi grafu H', który oznaczymy przez $E(H')$ oraz zbiór Z.

Przypuśćmy nie wprost, że graf H' nie jest spójny. Wówczas V można podzielić na dwa niepuste zbiory A i B w taki sposób, że w H' nie ma krawędzi łączącej jakikolwiek wierzchołek z A z jakimkolwiek wierzchołkiem z B. Rozważmy dowolne wierzchołki $u \in A$ i $v \in B$. Z lematu wynika, że u i v należą do różnych składowych spójności grafu G_{2022}. Zatem jeśli w grafie G jest krawędź łącząca u z v, to ta krawędź nie należy ani do $E(G_{2022})$ ani do $E(H')$ — musi więc należeć do zbioru Z. To znaczy, że po usunięciu z grafu G krawędzi ze zbioru Z otrzymujemy niespójny graf — nie ma w nim bowiem żadnej krawędzi łączącej jakikolwiek wierzchołek z A z jakimkolwiek wierzchołkiem z B. To jest sprzeczność z założeniem, że G jest wspaniały. Oznacza to, że graf H' jest spójny.

LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

31 marca 2022 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac \\ b^3 + c^2a = ba \\ c^3 + a^2b = cb \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Sposób 1. Jeśli $a = 0$, to z drugiego równania otrzymujemy $b = 0$. Podobnie, jeśli $b = 0$, to z trzeciego równania dostajemy $c = 0$, a jeśli $c = 0$, to pierwsze równanie daje $a = 0$. Zatem wszystkie niewiadome są jednocześnie zerowe lub jednocześnie niezerowe. Oczywiście trójka $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ spełnia układ.

Od teraz zakładamy, że $a, b, c \neq 0$. Pomnóżmy pierwsze równanie przez b, drugie przez c, a trzecie przez a. Otrzymujemy

$$\begin{cases} a^3b + b^3c = abc \\ b^3c + c^3a = abc \\ c^3a + a^3b = abc \end{cases}$$

Po dodaniu tych równań stronami dostajemy $2(a^3b + b^3c + c^3a) = 3abc$. Stąd obliczamy

$$a^3b = (a^3b + b^3c + c^3a) - (b^3c + c^3a) = \frac{3}{2}abc - abc = \frac{1}{2}abc.$$

Zatem $2a^2 = c$. Prowadząc analogiczne rachunki dowodzimy, że $2b^2 = a$ i $2c^2 = b$. Dostajemy

$$a = 2b^2 = 2(2c^2)^2 = 2^3c^4 = 2^3(2a^2)^4 = 2^7a^8.$$

Stąd $a = \frac{1}{2}$ i analogicznie obliczamy $b = c = \frac{1}{2}$. Trójka $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ spełnia układ.

Sposób 2. Zapiszmy równania w następującej postaci:

$$\begin{cases} a(2a^2 - c) = c(a - 2b^2) \\ b(2b^2 - a) = a(b - 2c^2) \\ c(2c^2 - b) = b(c - 2a^2) \end{cases}$$

Po pomnożeniu stronami otrzymujemy

$$abc(2a^2 - c)(2b^2 - a)(2c^2 - b) = abc(c - 2a^2)(a - 2b^2)(b - 2c^2).$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą przeciwną do prawej strony. Jest to możliwe jedynie gdy $abc(2a^2-c)(2b^2-a)(2c^2-b) = 0$. Stąd co najmniej jedna z liczb $a, b, c, 2a^2-c, 2b^2-a, 2c^2-b$ jest zerem. Podobnie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że jeśli jedna z liczb a, b, c jest zerem to wszystkie są. Jeśli $a, b, c \neq 0$, to któraś z liczb $2a^2 - c, 2b^2 - a, 2c^2 - b$ jest zerem. Równość $2a^2 - c = 0$ na mocy pierwszego równania pociąga za sobą $2b^2 - a = 0$, równość $2b^2 - a = 0$ na mocy drugiego równania daje $2c^2 - b = 0$, a równość $2c^2 - b = 0$ wobec trzeciego równania daje $2a^2 - c = 0$. Musi zatem być $2a^2 = c$, $2b^2 = a$ i $2c^2 = b$. Podobnie jak w sposobie pierwszym obliczamy $a = b = c = \frac{1}{2}$. Pozostaje sprawdzić, że otrzymane trójki $(a, b, c) = (0, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ spełniają wyjściowy układ.

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem boku BC. Punkt P leży na odcinku AB, przy czym $AP > PB$. Punkt Q leży na odcinku AC, przy czym $\sphericalangle MPA = \sphericalangle AQM$. Symetralne odcinków BC i PQ przecinają się w punkcie S. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QSP = \sphericalangle QMP$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech N będzie środkiem odcinka AB. Ponieważ $AP > PB$, więc P leży na odcinku NB. Zatem

$$\sphericalangle MPA = \sphericalangle MNA - \sphericalangle NMP < \sphericalangle MNA = 180^\circ - \sphericalangle BAC.$$

Suma kątów MPA, PAC jest więc mniejsza od 180° — a to oznacza, że półproste $PM^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ przecinają się. Punkt wspólny tych półprostych oznaczmy przez X. Również $\sphericalangle AQM + \sphericalangle BAQ < 180^\circ$, więc półproste $AB^{\rightarrow}$, $QM^{\rightarrow}$ przecinają się. Oznaczmy ich punkt przecięcia przez Y.

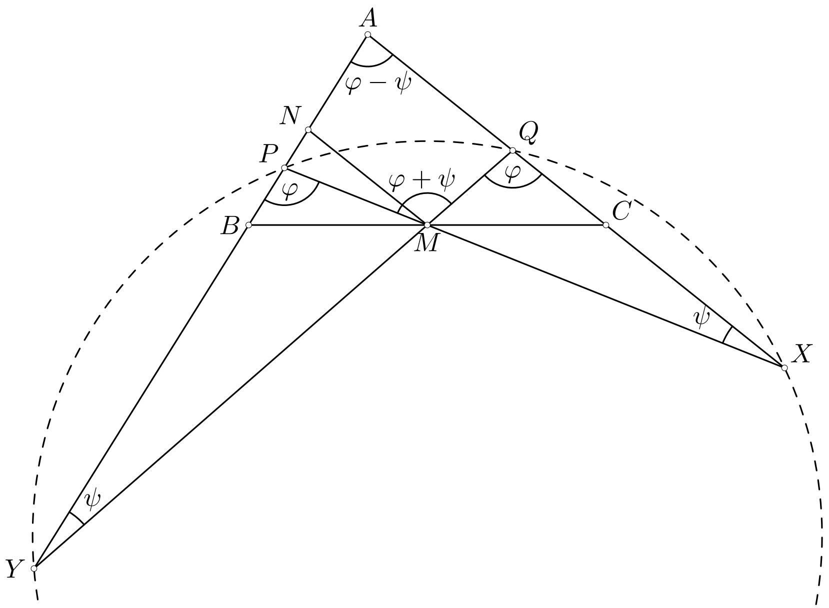
Mamy $\sphericalangle YPX = 180^\circ - \sphericalangle MPA = 180^\circ - \sphericalangle AQM = \sphericalangle YQX$. Wynika stąd, że czworokąt $XYPQ$ można wpisać w okrąg. Zachodzą równości $\sphericalangle QMP = 180^\circ - \sphericalangle XMQ = \sphericalangle MQX + \sphericalangle QXM$ oraz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle YQX - \sphericalangle QYA = \sphericalangle MQX - \sphericalangle QXP$. Należy więc udowodnić, że

$$\sphericalangle MQX - \sphericalangle QXP + \sphericalangle QSP = \sphericalangle MQX + \sphericalangle QXM,$$

czyli równoważnie

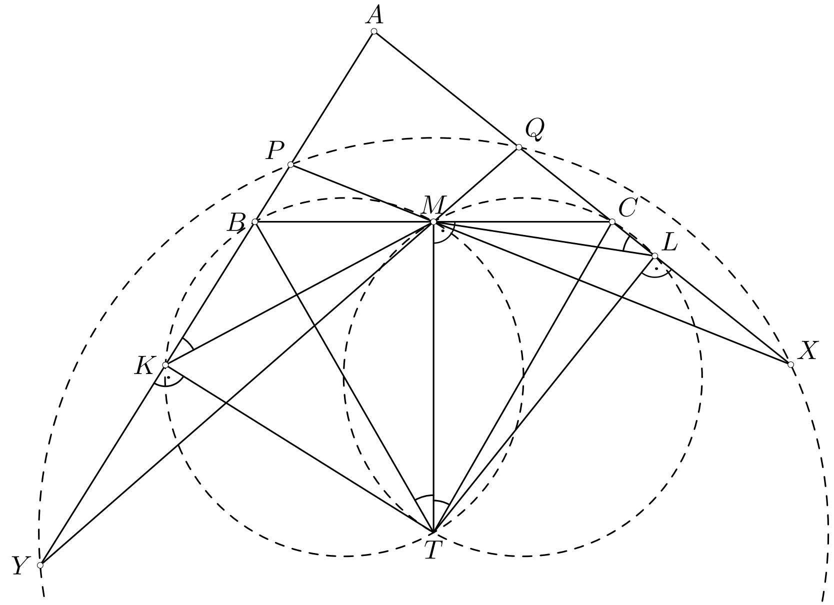
$$\sphericalangle QSP = 2\sphericalangle QXP.$$

W tym celu wystarczy udowodnić, że S jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $XYPQ$.



Z równości $\sphericalangle YPM = \sphericalangle MQX$ i $\sphericalangle PMY = \sphericalangle XMQ$ wynika, że trójkąty PMY, QMX są podobne. Oznaczmy środki odcinków PY i QX odpowiednio przez K i L. Wówczas trójkąty PMK i QML są podobne, bo odcinki MK, ML są odpowiadającymi sobie środkowymi w trójkątach PMY, QMX. W szczególności $\sphericalangle MKP = \sphericalangle QLM$.

Rozważmy punkt T na symetralnej odcinka BC spełniający równość $\sphericalangle CTB = 2\sphericalangle MKP$ oraz taki, że punkty A i T leżą po różnych stronach prostej BC. Udowodnimy, że $TK \perp AB$. Rozważymy trzy przypadki zależne od położenia punktu K na prostej AB względem punktu B. Jeśli K leży po tej samej stronie prostej BM co T, to $\sphericalangle MTB = \sphericalangle MKB$, więc punkty B, M, T, K leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle TKB = 180^\circ - \sphericalangle BMT = 90^\circ$. Jeśli K i T leżą po różnych stronach prostej BM, to $\sphericalangle BKM = 180^\circ - \sphericalangle MKP = 180^\circ - \sphericalangle MTB$, więc punkty M, T, B, K leżą na okręgu i $\sphericalangle TKB = \sphericalangle TMB = 90^\circ$. Jeśli K pokrywa się z punktem B, to $\sphericalangle MKP = \sphericalangle MTP$, a zatem $\sphericalangle TKP = \sphericalangle TKM + \sphericalangle MKP = 90^\circ - \sphericalangle MTB + \sphericalangle MTB = 90^\circ$. We wszystkich trzech możliwych przypadkach wykazaliśmy, że $TK \perp AB$. Prowadząc analogiczne rozumowanie (wystarczy w rachunkach podmienić B na C, K na L i P na Q) dowodzimy, że $TL \perp AC$.



Ponieważ $TK \perp AB$ i K jest środkiem PY, punkt T leży na symetralnej odcinka PY. Podobnie, $TL \perp QY$ i L jest środkiem QX, więc T leży na symetralnej odcinka QX. Stąd T jest przecięciem symetralnych dwóch boków czworokąta $XYPQ$ wpisanego w okrąg — punkt T jest więc środkiem tego okręgu. W szczególności T leży na symetralnej odcinka PQ. To oznacza, że $T = S$ i dowód jest zakończony.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita n. Udowodnić, że każdą z liczb $1, 2, \ldots, p-1$ można pokolorować na jeden z $2n$ kolorów tak, aby dla dowolnego $i = 2, 3, \ldots, n$ suma dowolnych i liczb tego samego koloru była niepodzielna przez p.

Zadanie zaproponowali: Tomasz Cieśla, Wojciech Nadara, Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Zbiór $X \subseteq \{1, 2, \ldots, p-1\}$ nazwiemy *dobrym* jeśli dla dowolnego $i = 2, 3, \ldots, n$ i dowolnych $x_1, \ldots, x_i \in X$ suma $x_1+x_2+\ldots+x_i$ nie dzieli się przez p. Wystarczy dowieść, że istnieją dobre zbiory $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$, takie że $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{2n} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ — wtedy kolorowanie zgodne z warunkami zadania otrzymamy przypisując liczbie x jakikolwiek kolor k, dla którego $x \in X_k$.

Dla każdej liczby całkowitej x oznaczymy przez $r(x) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ resztę z dzielenia liczby x przez p. Niech a będzie największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $an < p$. Dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots, p-1$ zdefiniujmy zbiór

$$A_j = \{r(j), r(2j), r(3j), \ldots, r(aj)\}.$$

Udowodnimy, że zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ są dobre. Są one oczywiście podzbiorami $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Pozostaje sprawdzić, że dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots, p-1$ oraz $i = 2, 3, \ldots, n$ suma dowolnych i elementów zbioru A_j nie dzieli się przez p. Niech $m_1, m_2, \ldots, m_i \in \{1, 2, \ldots, a\}$. Mamy

$$r(m_1 j) + r(m_2 j) + \ldots + r(m_i j) \equiv (m_1 + m_2 + \ldots + m_i) j \pmod{p}.$$

Ponieważ $m_1 + m_2 + \ldots + m_i \leqslant ai < p$, więc $m_1 + \ldots + m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$. Ponadto $j \not\equiv 0 \pmod{p}$. Zatem liczba $r(m_1 j) + r(m_2 j) + \ldots + r(m_i j)$ nie dzieli się przez p. To kończy uzasadnienie, że zbiór A_j jest dobry. By zakończyć rozwiązanie wystarczy dowieść, że pewne $2n$ zbiorów pośród $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ pokrywa cały zbiór $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.

Lemat. Dla dowolnej liczby $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ istnieje taka liczba $y \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, że $r(yx) \in \{1, 2, \ldots, a\}$.

Dowód lematu. Niech $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Rozważmy reszty

$$r(x), r(2x), r(3x), \ldots, r(nx), r((n+1)x).$$

Są one parami różne. W rzeczy samej, jeśli $ix \equiv jx \pmod{p}$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, to $(i-j)x \equiv 0 \pmod{p}$, skąd $i \equiv j \pmod{p}$. Wobec ograniczeń $1 \leqslant i, j \leqslant n+1 \leqslant p$ oznacza to, że $i = j$.

Rozważmy następujące przedziały:

$$[0, a], [a+1, 2a+1], [2a+2, 3a+2], \ldots, [(n-1)a+n-1, na+n-1].$$

Ponieważ $na+n > p$, więc każda z rozważanych reszt należy do któregoś z przedziałów. Reszt jest $n+1$, a przedziałów n. Z zasady szufladkowej wynika, że któreś dwie reszty są w tym samym przedziale. Zatem istnieją różne $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ takie, że reszta $r(ix)$ jest większa od $r(jx)$ o co najwyżej a. Połóżmy $y = i - j$. Wtedy $y \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ oraz $r(yx) = r(ix) - r(jx) \in \{1, 2, \ldots, a\}$ — dowód lematu jest zakończony.

Przypomnijmy, że dla dowolnej liczby całkowitej k niepodzielnej przez p istnieje liczba $f(k) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ spełniająca $f(k) \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$. Twierdzimy, że zbiory $A_{f(1)}, A_{f(2)}, \ldots, A_{f(n)}, A_{f(-1)}, A_{f(-2)}, \ldots, A_{f(-n)}$ pokrywają zbiór $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Rzeczywiście, rozważmy dowolną liczbę $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Z lematu wynika, że istnieją $y \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ oraz $b \in \{1, 2, \ldots, a\}$ takie, że $yx \equiv b \pmod{p}$. Ta kongruencja jest równoważna takiej: $x \equiv f(y) b \pmod{p}$. To znaczy, że $x = r(f(y)b)$, wobec czego $x \in A_{f(y)}$.