LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

1. Znaleźć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a,b,c,d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab+cd=6 \\ ac+bd=3 \\ ad+bc=2 \\ a+b+c+d=6 \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Układ ma cztery rozwiązania: $(a,b,c,d)=(0,1,2,3)$, $(a,b,c,d)=(1,0,3,2)$, $(a,b,c,d)=(2,3,0,1)$, $(a,b,c,d)=(3,2,1,0)$.

Z pierwszego i drugiego równania wynika, że

$$(a+d)(b+c)=ab+cd+ac+bd=6+3=9.$$

Z czwartego równania mamy $b+c=6-(a+d)$. Podstawiając to do powyższej równości dostajemy $(a+d)(6-(a+d))=9$. Liczba $a+d$ jest zatem pierwiastkiem wielomianu kwadratowego $9-x(6-x)=(x-3)^2$. Stąd $a+d=3$ oraz $b+c=6-(a+d)=3$.

Rozumując podobnie, z pierwszego i trzeciego równania wynika, że

$$(a+c)(b+d)=ab+cd+ad+bc=6+2=8.$$

Wykorzystując czwarte równanie dostajemy $b+d=6-(a+c)$, a więc $(a+c)(6-(a+c))=8$. Liczba $a+c$ jest zatem pierwiastkiem wielomianu kwadratowego $8-x(6-x)=(x-2)(x-4)$. Stąd $a+c=2$ lub $a+c=4$.

Z drugiego i trzeciego równania dostajemy

$$(a+b)(c+d)=ac+bd+ad+bc=3+2=5.$$

Z równości $c+d=6-(a+b)$ dostajemy, że $(a+b)(6-(a+b))=5$, a więc $a+b$ jest pierwiastkiem wielomianu $5-x(6-x)=(x-1)(x-5)$. Stąd $a+b=1$ lub $a+b=5$.

Mamy więc cztery możliwe przypadki:

i) $a+b=1$, $a+c=2$

ii) $a+b=1$, $a+c=4$

iii) $a+b=5$, $a+c=2$

iv) $a+b=5$, $a+c=4$

We wszystkich przypadkach wartość a możemy obliczyć z równości

$$a=\frac{1}{2}((a+b)+(a+c)-(b+c))=\frac{1}{2}((a+b)+(a+c)-3),$$

a wartości pozostałych zmiennych możemy wyznaczyć z równości $b=(a+b)-a$, $c=(a+c)-a$ i $d=(a+d)-a=3-a$. Otrzymujemy w poszczególnych przypadkach:

i) $a = 0,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3$

ii) $a = 1,\ b = 0,\ c = 3,\ d = 2$

iii) $a = 2,\ b = 3,\ c = 0,\ d = 1$

iv) $a = 3,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 0$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie otrzymane czwórki liczb spełniają wyjściowy układ.

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Środek tego okręgu leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Punkty P i Q są środkami odpowiednio boków AD i BC. Niech p będzie prostą prostopadłą do prostej AC i przechodzącą przez punkt P, q prostą prostopadłą do prostej BD i przechodzącą przez punkt Q, zaś s prostą prostopadłą do prostej CD i przechodzącą przez punkt S. Dowieść, że proste p, q, s przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

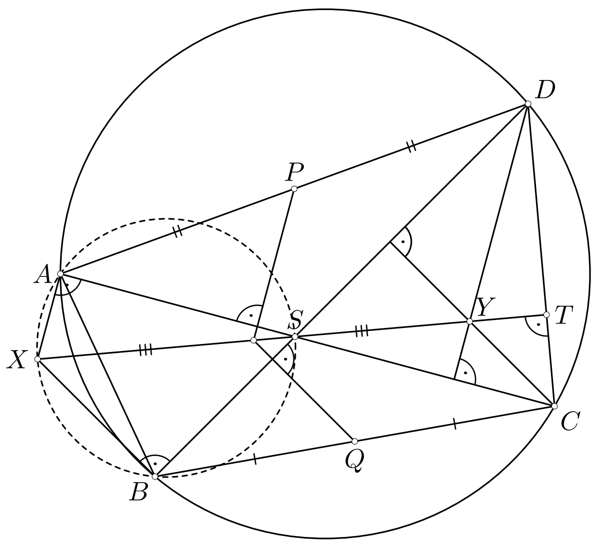
Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na prostą CD. Wtedy T jest przecięciem prostej s z prostą CD. Niech X będzie punktem przecięcia prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez A i prostej prostopadłej do BD przechodzącej przez B. Wykażemy, że X leży na prostej s.

Punkty A, B, S, X leżą na okręgu o średnicy SX. Z założenia, że środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ leży wewnątrz tego czworokąta wynika, że kąty DBA i BAC są ostre. Punkty X i S leżą więc po różnych stronach prostej AB. Mamy

$$\sphericalangle ASX = \sphericalangle ABX = 90^\circ - \sphericalangle SBA = 90^\circ - \sphericalangle DCS = \sphericalangle CST.$$

Wynika stąd, że punkty X, S, T są współliniowe, czyli że X leży na prostej s.

Niech Y będzie ortocentrum trójkąta CDS. Wtedy Y leży na prostej s. Zauważmy, że prosta p jest linią środkową trapezu $XADY$. Rzeczywiście, jest ona równoległa do podstaw AX, DY (bo wszystkie trzy proste są prostopadłe do AC) i przechodzi przez środek ramienia AD. W takim razie p przechodzi także przez środek drugiego ramienia tego trapezu, czyli przez środek odcinka XY. Podobnie, prosta q jest linią środkową trapezu $BXYC$, gdyż jest równoległa do podstaw BX, CY (wszystkie trzy proste są prostopadłe do BD) i przechodzi przez środek ramienia BC. Stąd q również przechodzi przez środek XY. Wykazaliśmy więc, że proste p, q przecinają się w środku odcinka XY, który oczywiście leży także na prostej s.



3. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^3 + 4b + c = abc,$$

przy czym $a \geqslant c$ oraz liczba $p = a^2 + 2a + 2$ jest pierwsza. Wykazać, że p jest dzielnikiem liczby $a + 2b + 2$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Sposób 1. Ponieważ $b(ac-4) = a^3 + c$, więc $ac - 4 > 0$. Zatem

$$b = \frac{a^3 + c}{ac - 4}.$$

Należy więc wykazać, że liczba

$$a + 2 \cdot \frac{a^3 + c}{ac - 4} + 2 = \frac{a^2c - 4a + 2a^3 + 2c + 2ac - 8}{ac - 4}$$

dzieli się przez p. Ponieważ $c \leqslant a$, więc $ac - 4 < a^2 < a^2 + 2a + 2 = p$. W szczególności $\mathrm{NWD}(p, ac-4) = 1$, więc wystarczy dowieść, że liczba $a^2c - 4a + 2a^3 + 2c + 2ac - 8$ dzieli się przez p. Wynika to z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} a^2c - 4a + 2a^3 + 2c + 2ac - 8 &= c(a^2 + 2a + 2) + 2a^3 - 4a - 8 \\ &= cp + 2(a^2 + 2a + 2)(a - 2) \\ &= p(c + 2a - 4). \end{aligned}$$

Sposób 2. Równość daną w treści zadania mnożymy przez a a następnie dodajemy do obu stron otrzymanej równości liczbę $4 - 4ab - ac$. Otrzymujemy $a^4 + 4 = a^2bc + 4 - 4ab - ac$. Ponieważ

$$a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2) = p(a^2 - 2a + 2)$$

oraz

$$a^2bc + 4 - 4ab - ac = (ab - 1)(ac - 4),$$

więc $p(a^2 - 2a + 2) = (ab - 1)(ac - 4)$. Podobnie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że $\mathrm{NWD}(p, ac-4) = 1$. Wobec tego z poprzedniej równości wynika, że p jest dzielnikiem liczby $ab - 1$.

Mamy

$$a^3 = a(p - 2a - 2) = ap - 2a^2 - 2a = ap - 2(p - 2a - 2) - 2a = p(a - 2) + 2a + 4,$$

więc z równości danej w treści zadania otrzymujemy

$$0 = a^3 + 4b + c - abc = p(a - 2) + 2a + 4 + 4b - c(ab - 1).$$

Liczby $p(a-2)$ i $c(ab-1)$ dzielą się przez p, więc z powyższej równości wynika, że liczba $2a + 4 + 4b = 2(a + 2b + 2)$ także dzieli się przez p. Skoro zaś $p > 2$, to p jest dzielnikiem liczby $a + 2b + 2$.

Uwaga. Można wykazać, że tylko trzy czwórki (a, b, c, p) spełniają warunki narzucone w treści zadania; są to $(a, b, c, p) = (3, 6, 3, 17)$, $(a, b, c, p) = (5, 126, 1, 37)$ i $(a, b, c, p) = (9, 146, 1, 101)$. Rachunki przeprowadzone w sposobie pierwszym prowadzą do równości

$$(a + 2b + 2)(ac - 4) = p(c + 2a - 4).$$

Jak już wiemy, $ac - 4 > 0$, więc także $c + 2a - 4 > 0$, a skoro $\mathrm{NWD}(ac-4, p) = 1$, to $ac - 4$ musi dzielić $c + 2a - 4$. W szczególności $ac - 4 \leqslant c + 2a - 4$, tj. $ac \leqslant c + 2a$. Z założenia $a \geqslant c$ wynika, że $c + 2a \leqslant 3a$, więc $ac \leqslant 3a$, tj. $c \leqslant 3$. Pozostaje rozpatrzyć kilka możliwości.

Jeśli $c = 3$, to nierówności $a \geqslant c$ i $ac \leqslant c + 2a$ wymuszają $a = 3$. Wtedy $b = 6$ i $p = 17$.

Przypadek $c = 2$ jest niemożliwy. Z równania $a^3 + 4b + c = abc$ wynikłoby wtedy, że liczba a jest parzysta. Wtedy jednak $a^3 + 4b + 2 = 2ab$, co jest niemożliwe, bo prawa strona dzieliłaby się przez 4, a lewa nie.

Dla $c = 1$ liczba $a - 4$ ma być dodatnim dzielnikiem liczby $2a - 3$. Stąd $a - 4$ jest dodatnim dzielnikiem liczby $2a - 3 - 2(a - 4) = 5$. To prowadzi do dwóch możliwości: $a = 5$ lub $a = 9$. Jeśli $a = 5$, to $b = 126$ i $p = 37$. Jeśli $a = 9$, to $b = 146$ i $p = 101$.

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na odcinku BC, przy czym $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAB$. Punkt M jest środkiem odcinka CE. Udowodnić, że $BM = DM$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

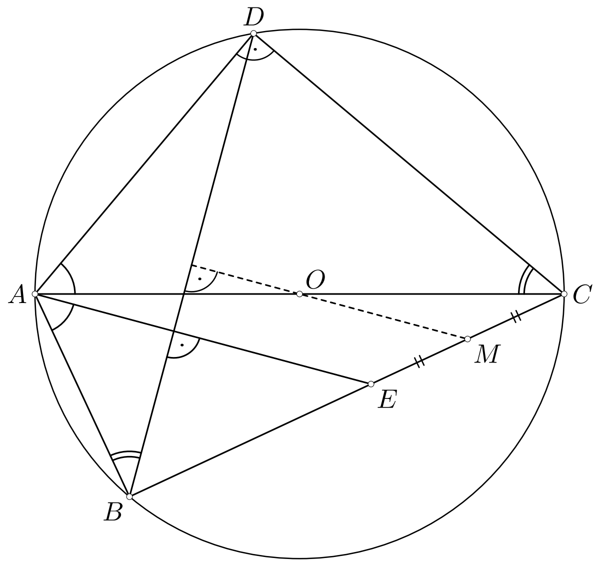
Rozwiązanie:

Sposób 1. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BAE + \sphericalangle DBA = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DCA = 90^\circ.$$

Stąd proste AE i BD są prostopadłe.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Wtedy O jest środkiem odcinka AC, gdyż AC jest średnicą tego okręgu. Prosta OM jest zatem linią środkową trójkąta ACE. W szczególności prosta OM jest równoległa do AE. Wobec tego prosta OM jest prostopadła do BD. Ponieważ O jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, więc $OB = OD$. Wynika stąd, że prosta OM jest symetralną odcinka BD. Zatem $BM = DM$.

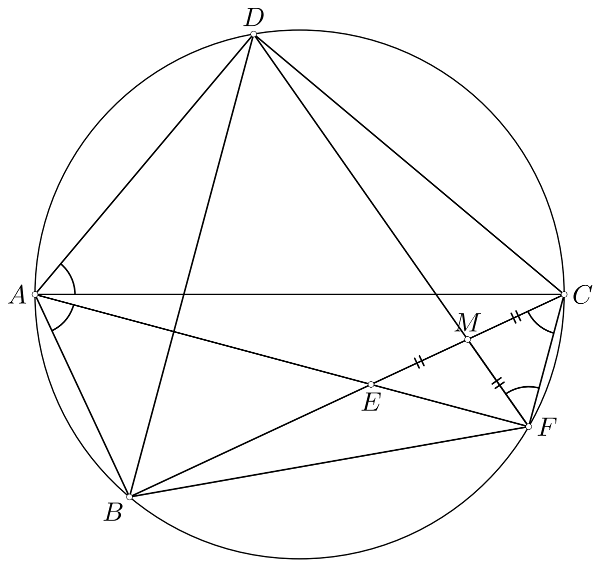


Sposób 2. Niech F będzie drugim punktem przecięcia prostej AE z okręgiem opisanym na czworokącie $ABCD$. Ponieważ AC jest średnicą tego okręgu, więc kąt CFE jest prosty. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego CEF, więc $MF = MC$. Mamy zatem

$$\sphericalangle CFM = \sphericalangle MCF = \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CFD,$$

więc punkty D, M, F są współliniowe.

Kąty oparte na łukach BF i CD są równe, więc czworokąt $BFCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach BD, CF. Punkt M jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu, a zatem $BM = DM$.



5. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą* jeśli istnieje dodatnia liczba całkowita k, dla której $n = k(k+1)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje 2022 parami różnych dobrych liczb, których suma jest również dobrą liczbą.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak.

Oznaczmy

$$x = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2021 \cdot 2022).$$

Dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, 2021$ liczba $i(i+1)$ jest parzysta, bo jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. W konsekwencji liczba x jest całkowita. Zauważmy, że

$$x(x+1) = (x-1)x + 2x = (x-1)x + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2021 \cdot 2022.$$

Powyższa równość stanowi przedstawienie dobrej liczby $x(x+1)$ w postaci sumy 2022 parami różnych dobrych liczb.

6. W turnieju badmintona wzięło udział n zawodników, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Każdych dwóch zawodników zagrało ze sobą dokładnie dwa mecze, nie było remisów. Okazało się, że każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Wykazać, że można unieważnić dokładnie połowę wszystkich meczów w taki sposób, by również wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie:

Parę meczów rozegranych między dwoma zawodnikami będziemy nazywać *dwumeczem*. Powiemy, że zawodnik *wygrał dwumecz* (odpowiednio *przegrał dwumecz*) jeśli zwyciężył (odpowiednio przegrał) w obu meczach w tym dwumeczu. Dwumecz, którego nie wygrał żaden z graczy (a więc obaj gracze wygrali po jednym meczu) będziemy nazywać *remisowym*. Udowodnimy, że można unieważnić po jednym meczu z każdego dwumeczu w taki sposób, by wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Warunki zadania zostaną spełnione, bo unieważnimy w ten sposób dokładnie połowę wszystkich meczów.

Wykażemy najpierw, że każdy zawodnik wygrał tyle samo dwumeczów co przegrał, a ponadto liczba dwumeczów remisowych, w których brał udział, jest parzysta. Rozważmy dowolnego zawodnika i załóżmy, że wygrał on a dwumeczów, przegrał b dwumeczów oraz rozegrał c dwumeczów remisowych. Każdy zawodnik zagrał w $n-1$ dwumeczach, więc $a+b+c=n-1$. Z założeń zadania każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów ile przegrał, więc $2a+c=2b+c$, skąd otrzymujemy $a=b$. W konsekwencji liczba $c=n-1-a-b=n-1-2a$ jest parzysta, gdyż na mocy założeń zadania liczba n jest nieparzysta.

Dla każdego nieremisowego dwumeczu unieważniamy dowolny z meczów będących częścią tego dwumeczu. Ponieważ każdy zawodnik wygrał tyle samo dwumeczów co przegrał, zachowana zostanie własność, że każdy zawodnik wygrał tyle samo ważnych meczów co przegrał. Pozostaje wykazać, że można unieważnić po jednym meczu z dwumeczów remisowych w żądany sposób.

Niech G będzie grafem, którego wierzchołkami są zawodnicy, a krawędź $v-w$ prowadzimy wtedy i tylko wtedy, gdy dwumecz między tymi zawodnikami był remisowy. Z obserwacji z drugiego akapitu rozwiązania wynika, że stopień każdego wierzchołka w grafie G jest parzysty. Z twierdzenia Eulera wynika, że graf G można podzielić na pewną liczbę krawędziowo rozłącznych cykli (przyjmujemy konwencję, że wierzchołki w cyklu się nie powtarzają). Dla każdego cyklu $v_1-v_2-v_3-\ldots-v_k-v_1$ unieważniamy mecze, w których v_1 wygrał z v_2, v_2 wygrał z v_3, $\ldots$, v_{k-1} wygrał z v_k i v_k wygrał z v_1. Każda krawędź pojawia się w dokładnie jednym cyklu, więc unieważniono po jednym meczu z każdego dwumeczu. Zauważmy, że po takim unieważnieniu meczów zachowujemy własność, że każdy zawodnik wygrał tyle samo ważnych meczów co przegrał. Istotnie, unieważniając mecze w obrębie ustalonego cyklu, każdemu zawodnikowi unieważniliśmy dokładnie jedno zwycięstwo i jedną porażkę.