LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
11 lutego 2022 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Znaleźć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + cd = 6 \\ ac + bd = 3 \\ ad + bc = 2 \\ a + b + c + d = 6 \end{cases}$$

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Środek tego okręgu leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Punkty P i Q są środkami odpowiednio boków AD i BC. Niech p będzie prostą prostopadłą do prostej AC i przechodzącą przez punkt P, q prostą prostopadłą do prostej BD i przechodzącą przez punkt Q, zaś s prostą prostopadłą do prostej CD i przechodzącą przez punkt S. Dowieść, że proste p, q, s przecinają się w jednym punkcie.

3. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^3 + 4b + c = abc,$$

przy czym $a \geqslant c$ oraz liczba $p = a^2 + 2a + 2$ jest pierwsza. Wykazać, że p jest dzielnikiem liczby $a + 2b + 2$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
12 lutego 2022 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na odcinku BC, przy czym $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAB$. Punkt M jest środkiem odcinka CE. Udowodnić, że $BM = DM$.

5. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą* jeśli istnieje dodatnia liczba całkowita k, dla której $n = k(k + 1)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje 2022 parami różnych dobrych liczb, których suma jest również dobrą liczbą.

6. W turnieju badmintona wzięło udział n zawodników, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Każdych dwóch zawodników zagrało ze sobą dokładnie dwa mecze, nie było remisów. Okazało się, że każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Wykazać, że można unieważnić dokładnie połowę wszystkich meczów w taki sposób, by również wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.