LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 30 września 2020 r.

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|(ax+by)(ay+bx)| \leqslant x^2+y^2$. Udowodnić, że $a^2+b^2 \leqslant 2$.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt X leży na odcinku AB, punkt Y leży na prostej ℓ, przy czym $AX = AY = AC$ oraz punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC. Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na prostej XY.

3. Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

4. Wśród punktów płaszczyzny o obydwu współrzędnych w zbiorze $\{1, \ldots, 106\}$ niektóre punkty zaznaczono, przy czym dla każdych dwóch zaznaczonych punktów (x, y) oraz (x', y') spełniony jest co najmniej jeden z warunków:

(1) $x > x' - 10$ oraz $y > y' - 10$;

(2) $x' > x - 10$ oraz $y' > y - 10$.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę zaznaczonych punktów.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2020 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 2 listopada 2020 r.

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta BI przecina bok AC w punkcie D. Punkt D jest środkiem odcinka IX. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX. Udowodnić, że proste OD i AC są prostopadłe.

6. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d, przy czym $a, c > 1$ i $b, d < 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

7. W każde pole planszy 2020×2020 wpisano liczbę rzeczywistą. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla dowolnych czterech pól o wspólnym wierzchołku, jeśli przez a, b, c, d oznaczymy liczby wpisane w te pola jak na rysunku, to zachodzi układ równań

$$\begin{cases} a+b+2c+3d = 0 \\ 2a+b+3c+4d = 0. \end{cases}$$

a	b
c	d

Rysunek

Udowodnić, że istnieje 500 różnych pól, w które wpisano tę samą liczbę.

8. Dane są takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach rzeczywistych, że suma dowolnych dwóch z nich nie ma pierwiastka rzeczywistego. Udowodnić, że jeśli wielomian $f_1+f_2+f_3+f_4$ ma pierwiastek rzeczywisty, to co najmniej jeden z wielomianów f_1, f_2, f_3, f_4 nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 listopada 2020 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 2 grudnia 2020 r.

9. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Dane są liczby rzeczywiste a_{ij}, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$, przy czym dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi warunek

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \ \in \ \{-1, 1\}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich par i, j, że $a_{ij} \neq 0$ oraz $i < j$.

10. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB i ABC odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Udowodnić, że jeśli proste AA' i BB' przecinają się, to proste CC' i DD' także się przecinają.

11. Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 2$. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *ładną* wtedy i tylko wtedy, gdy suma reszt z dzielenia liczb $n, n^2, n^3, \ldots, n^{p-1}$ przez p jest równa $\frac{1}{2}p(p-1)$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, \ldots, p-1\}$ liczb ładnych jest nieparzyście wiele.

Uwaga. Resztą z dzielenia liczby całkowitej a przez dodatnią liczbę całkowitą b nazywamy taką liczbę $r \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, że liczba $a - r$ jest podzielna przez b.

12. Niech $A_{m,n}$ oznacza zbiór wektorów (k, l), gdzie $0 \leqslant k \leqslant m-1$ oraz $0 \leqslant l \leqslant n-1$ są liczbami całkowitymi. Funkcję $f\colon A_{m,n} \to A_{m,n}$ nazywamy *dobrą* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są obydwa warunki:

(1) f jest funkcją różnowartościową;

(2) jeśli $v, w \in A_{m,n}$ oraz $v + f(v) - w - f(w) = (am, bn)$ dla pewnych liczb całkowitych a i b, to $v = w$.

Wyznaczyć wszystkie pary m, n dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieje dobra funkcja $f\colon A_{m,n} \to A_{m,n}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 grudnia 2020 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
  ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
  ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
  ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810,
  Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
  pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
  ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
  ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Wydział Matematyczno–Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego,
  ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy
  Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
  ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
  — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej
  — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika,
  ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy
  Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
  ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy
  Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
  pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl