LXXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
3 września – 2 grudnia 2019 r.

1. Rozważmy wszystkie liczby postaci $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że różnych takich liczb jest nie więcej niż $2\sqrt{n}+1$.

Uwaga: Dla każdej liczby rzeczywistej x, przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Jeśli $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$, to wyrażenie $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ przyjmuje oczywiście co najwyżej $\sqrt{n}$ wartości. Jeśli $\sqrt{n} < k \leqslant n$, to

$$1 \leqslant \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \right\rfloor \leqslant \sqrt{n},$$

więc również $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ przyjmuje nie więcej niż $\sqrt{n}$ wartości.

Dla pozostałych liczb $k > n$, wartością wyrażenia $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ jest równa 0, więc łącznie dostajemy co najwyżej $2\sqrt{n}+1$ wartości.

2. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 4$ wyznaczyć wszystkie takie ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 + 2a_i a_{i+3} \leqslant 0 \qquad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $a_{n+t} = a_t$ dla $t \in \{1, 2, 3\}$.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Sumując stronami dane nierówności dostajemy, że $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i+3})^2 \leqslant 0$. Ponieważ suma kwadratów jest niedodatnia, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są zerami, to $a_i = -a_{i+3}$ dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$. Ponadto, we wszystkich nierównościach danych w zadaniu musi zachodzić równość, więc

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 = 2a_i^2 \qquad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Odejmujemy dwa kolejne równania i po uwzględnieniu równości $a_i = -a_{i+3}$ otrzymujemy

$$(a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) - (a_{i+2}^2 + a_{i+3}^2) = 2(a_i^2 - a_{i+1}^2) \Rightarrow 3a_{i+1}^2 = 3a_i^2 \iff |a_{i+1}| = |a_i|$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$. Oznacza to, że wszystkie liczby w naszym ciągu mają tę samą wartość bezwzględną.

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek I. Pewne dwa kolejne wyrazy szukanego ciągu są równe.
Niech $a_{i+1} = a_{i+2}$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wówczas, ponieważ wszystkie liczby w rozważanym ciągu mają tę samą wartość bezwzględną oraz $a_i = -a_{i+3}$, to $a_i = a_{i+1} = a_{i+2}$ lub $a_{i+1} = a_{i+2} = a_{i+3}$, więc pewne trzy kolejne wyrazy ciągu są równe. Zauważmy, że jeżeli pewien ciąg spełnia warunki zadania, to spełniają je też cykliczne przesunięcia ciągu. Bez straty ogólności rozważał przyjmijmy, że $a_1 = a_2 = a_3$. Stosując indukcję nietrudno wykazać, że dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n+3$ zachodzi wzór

$$a_i = \begin{cases} a_1 & \text{gdy } i \text{ daje przy dzieleniu przez 6 resztę } 1, 2 \text{ lub } 3 \\ -a_1 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}. \qquad (1)$$

Jeżeli n nie jest liczbą podzielną przez 6, to pewna liczba spośród $n+1, n+2, n+3$ daje z dzielenia przez 6 resztę różną od $1, 2$ i 3. Wtedy któraś z liczb $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ jest równa $-a_1$ a z definicji ciągu wynika, że

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3},$$

więc $a_1 = -a_1$ i w konsekwencji $a_1 = 0$. Wobec tego wszystkie wyrazy rozważanego ciągu są równe zero.

Jeżeli zaś n jest liczbą podzielną przez 6, to zgodnie ze wzorem (1) rozważany ciąg jest postaci

$$(C, C, C, -C, -C, -C, \ldots, C, C, C, -C, -C, -C),$$

dla pewnej liczby rzeczywistej C. Łatwo sprawdzić, że tak określony ciąg spełnia warunki zadania.

Przypadek II. Każde dwa kolejne wyrazy szukanego ciągu są różne.

Ponieważ $|a_i| = |a_{i+1}|$ dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$, więc $a_{i+1} = -a_i$. Stosując indukcję nietrudno wykazać, że $a_i = (-1)^{i+1}a_1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $a_1 = a_{n+1} = (-1)^{n+2}a_1 = -a_1$, więc $a_1 = 0$ i otrzymujemy sprzeczność, gdyż wówczas $a_1 = a_2 = 0$. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to ciąg jest postaci

$$(C, -C, C, -C, \ldots, C, -C), \qquad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Łatwo sprawdzić, że ciągi tej postaci spełniają warunki zadania.

Podsumowując: warunki zadania spełnia ciąg stale równy zero, ponadto jeśli n jest liczbą parzystą, to spełniają je również ciągi postaci $(C, -C, C, -C, \ldots, C, -C)$, dla pewnego $C \in \mathbb{R}$ oraz jeśli n jest liczbą podzielną przez 6, to spełniają je też ciągi postaci

$$(C, C, C, -C, -C, -C, \ldots, C, C, C, -C, -C, -C)$$

i jego cykliczne przesunięcia, gdzie $C \in \mathbb{R}$. $\square$

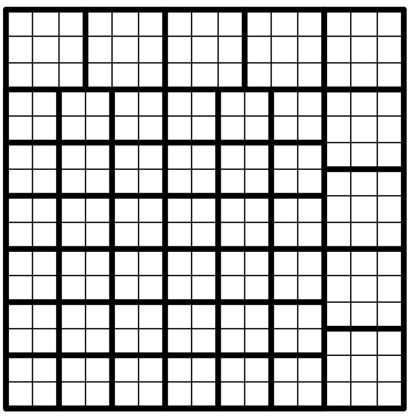
3. Szachownicę o wymiarach 15×15 przykryto przy pomocy płytek o wymiarach 2×2 i 3×3 w taki sposób, że każde pole jest przykryte przez dokładnie jedną płytką oraz płytki nie wystają poza szachownicę. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek 3×3, dla której jest to możliwe.

Autorzy zadania: Łukasz Bożyk, Michał Pilipczuk, Tomasz Przybyłowski

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą płytek 3×3, dla której przykrycie z treści zadania jest możliwe jest 9.

Niech x oznacza szukaną minimalną liczbę płytek 3×3. Na rysunku przedstawiono przykrycie z użyciem dziewięciu płytek 3×3, więc $x \leqslant 9$.



rys. 1

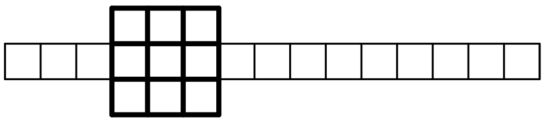
Rozważmy dowolne przykrycie. Niech n, m będą odpowiednio liczbą użytych płytek 2×2 i 3×3. Wówczas $4n + 9m = 225$, lub równoważnie $m = 4(56 - n - 2m) + 1$, więc m daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1. Oznacza, to że $x = 1, 5$ lub 9.

Zauważmy, że ponieważ dowolna kolumna zawiera nieparzystą liczbę pól, a płytka 2×2 przykrywa 0 lub 2 pola, to muszą w niej istnieć pola przykryte przez płytkę 3×3. Podobnie, w każdym wierszu muszą istnieć pola przykryte przez płytkę 3×3.

Każda płytka 3×3 przykrywa pola w dokładnie trzech różnych kolumnach, więc liczba płytek 3×3 wynosi co najmniej $\frac{15}{3} = 5$. W szczególności nie może być $x = 1$, więc $x = 5$ lub 9.

Przypuśćmy, że istnieje przykrycie przy użyciu pięciu płytek 3×3. Każda z 15 kolumn musi posiadać pola przykryte przez płytki 3×3, zaś każda z pięciu użytych płytek 3×3 przykrywa pola w dokładnie trzech kolumnach, więc żadne dwie płytki 3×3 nie mogą przykrywać pól tej samej kolumny. Ponadto, płytki 3×3 można tak ponumerować $P_1, P_2, \ldots, P_5$, że i-ta płytka pokrywa pola w kolumnach $3i - 2, 3i - 1, 3i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 5$. Analogicznie żadne dwie płytki 3×3 nie mogą przykrywać pól tego samego wiersza.

Rozważmy płytkę P_2, znajdującą się w kolumnach od czwartej do szóstej. Weźmy dowolny wiersz, w którym znajduje się ta płytka. Po jednej stronie płytki znajdują się trzy pola a po drugiej dziewięć, więc nie mogą być one przykryte przez płytki 2×2. Oznacza to, że pola tego wiersza przykrywa inna płytka 3×3 — sprzeczność.

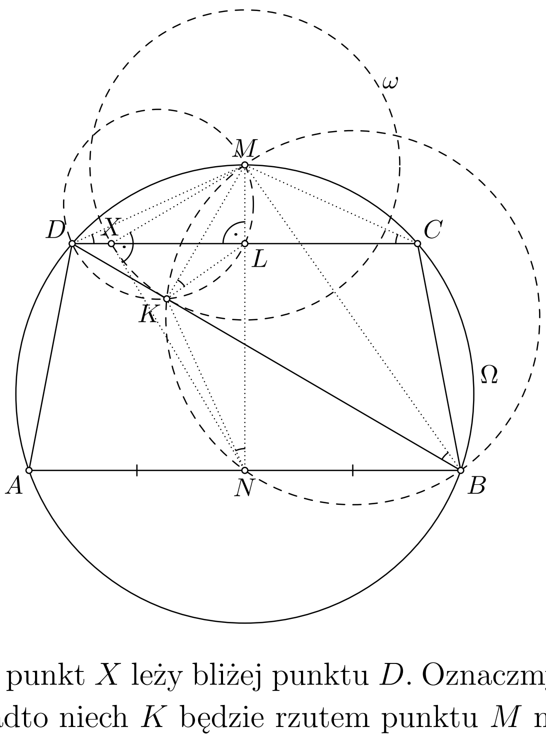


Wykazaliśmy, że nie istnieje żądane przykrycie przy użyciu pięciu płytek, więc $x = 9$. $\square$

4. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg ω. Punkt M jest środkiem tego łuku CD okręgu Ω, na którym nie leży punkt A. Niech ω będzie okręgiem o środku M stycznym do prostej AD. Punkt X jest jednym z punktów przecięcia prostej CD z okręgiem ω. Udowodnić, że prosta styczna do okręgu ω w punkcie X przechodzi przez środek odcinka AB.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



Bez szkody przyjmijmy, że punkt X leży bliżej punktu D. Oznaczmy przez N i L środki odcinków AB i CD, odpowiednio. Ponadto niech K będzie rzutem punktu M na odcinek DB.

Kąty BKM i BNM są proste, więc na czworokącie $BNKM$ można opisać okrąg. Podobnie, na czworokącie $MLKD$ można również opisać okrąg. Wobec tego korzystając wielokrotnie z twierdzenia o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku (lub łukach tej samej długości) otrzymujemy równości

$$\angle LKM = \angle LDM = \angle MCD = \angle MBK = \angle MNK.$$

Zatem trójkąty KML i NKM są podobne. Oznacza to że prawdziwa jest równość

$$\frac{ML}{MK} = \frac{MK}{MN}.$$

Punkt M jest środkiem łuku CD, zatem półprosta BM jest dwusieczną kąta DBC, więc odległości punktu M od prostych BD i BC są równe, zatem też równe odległości M od prostej AD, czyli promieniowi okręgu ω. Wobec tego $XM = MK$, stąd

$$\frac{ML}{MX} = \frac{MX}{MN}. \tag{2}$$

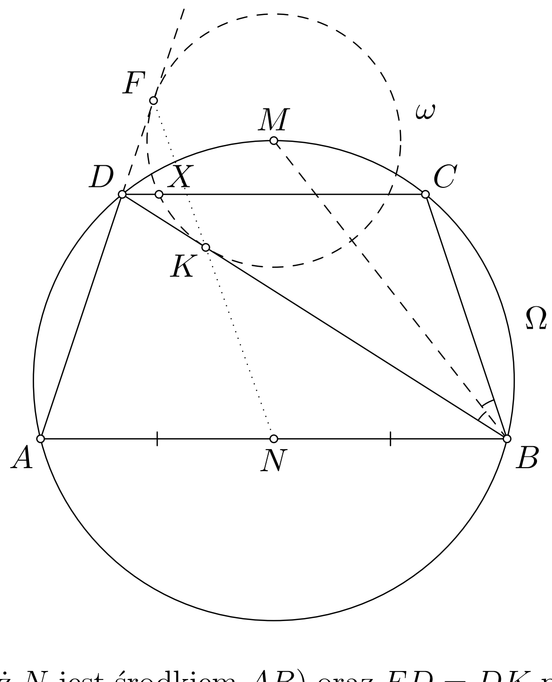
Z ostatniej równości wynika, że trójkąty XML i NMX są podobne, gdyż mają one dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku M. Wobec tego $\angle NXM = \angle MLX = 90°$, czyli XN jest styczna do okręgu ω.

Inne rozwiązanie:

Punkt M jest środkiem łuku DC okręgu Ω, więc MB jest dwusieczną kąta CBD. Ponadto ω jest okręgiem stycznym do AD i BC, więc M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ograniczony prostymi AD, BD i BC. W szczególności ω jest styczny do BD – oznaczmy punkt styczności przez K, jak wyżej.

Niech F będzie punktem styczności ω i AD, a N środkiem odcinka AB. Pokażemy, że punkty F, K i N są współliniowe. Istotnie, na podstawie twierdzenia Menelaosa zastosowanego dla trójkąta ADB i punktów F, K i N leżących odpowiednio na prostych AD, BD i BA wystarczy pokazać, że

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{DK} \cdot \frac{FD}{FA} = 1. \tag{3}$$



Jednakże $AN = NB$ (gdyż N jest środkiem AB) oraz $FD = DK$ ponieważ są to odcinki styczne poprowadzone z punktu D do ω.

Równość (3) jest zatem równoważna temu, że $AF = KB$. Zauważmy jednak, że prosta MN jest osią symetrii trapezu $ABCD$ i ω. Wobec tego długości odcinków stycznych do ω poprowadzonych z punktów A i B są równe, a co za tym idzie $AF = BK$.

Na podstawie powyższej współliniowości widzimy, że N leży na biegunowej FK punktu D względem ω. Wykorzystując twierdzenie o wzajemności biegunowych dostajemy, że D leży na biegunowej punktu N względem ω. A ponieważ $MN \perp CD$, to CD jest biegunową punktu N względem ω. Wobec tego X, który jest punktem przecięcia ω i biegunowej punktu N względem ω, leży na stycznej poprowadzonej z punktu N do ω – stąd teza.

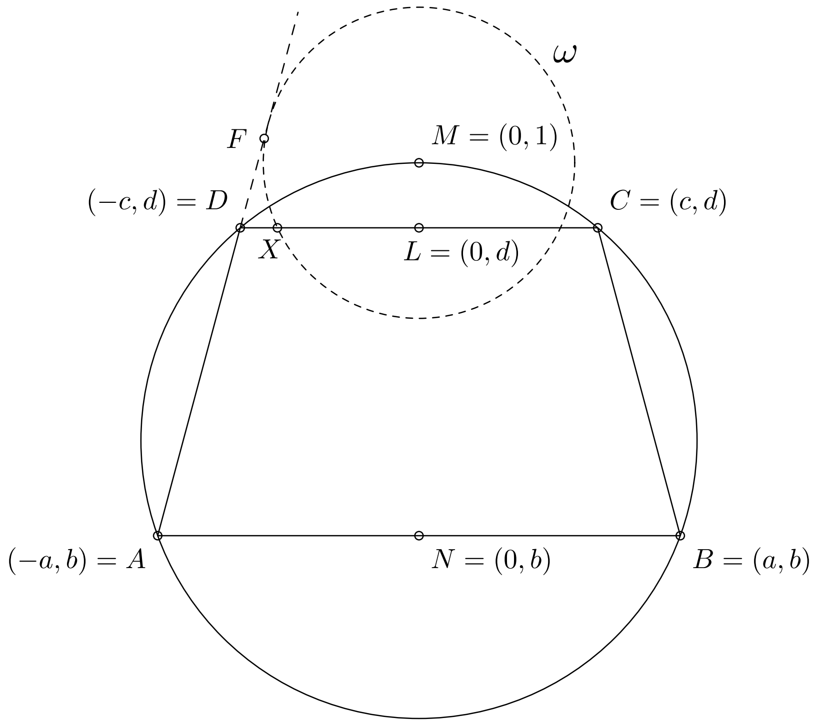
Uwaga. Zauważmy, że punkty F, K i N są rzutami punktu M na proste AD, DB i AB, odpowiednio. Zatem na podstawie twierdzenia Simsona zastosowanego dla trójkąta ADB i punktu M leżącego na Ω, punkty F, K i N są współliniowe.

Inne rozwiązanie:

Pokażemy teraz rozwiązanie analityczne: Załóżmy, że okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest opisany równaniem $x^2 + y^2 = 1$ oraz że $A = (-a, b)$, $B = (a, b)$, $C = (c, d)$, $D = (-c, d)$, $b < d$. Mamy więc $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ oraz $M = (0, 1)$. Równanie prostej AD wygląda tak

$$(d-b)x + (c-a)y - bc + ad = 0,$$

więc kwadrat odległości punktu M od prostej AD, czyli kwadrat promienia okręgu ω jest równy



$$MF^2 = MX^2 = \tfrac{(c-a-bc+ad)^2}{(d-b)^2+(c-a)^2} = \tfrac{(c(1-b)-a(1-d))^2}{2-2bd-2ac} = \tfrac{(1-d^2)(1-b)^2-2ac(1-b)(1-d)+(1-b^2)(1-d)^2}{2-2bd-2ac} =$$

$$= \tfrac{(1-d)(1-b)}{2-2bd-2ac}\big((1+d)(1-b) - 2ac + (1+b)(1-d)\big) = \tfrac{(1-d)(1-b)}{2-2bd-2ac}\big(2 - 2ac - 2bd\big) = (1-d)(1-b).$$

Niech $X = (u, d)$, $L = (0, d)$ oraz $N = (0, b)$. Udowodnimy, że kąt $\angle MXN$ jest prosty, czyli że $MN^2 = MX^2 + XN^2$. Ponieważ $MX^2 = ML^2 + LX^2$ i $NX^2 = LX^2 + LN^2 = MX^2 - ML^2 + LN^2$, więc

$$MX^2 + XN^2 = 2MX^2 - ML^2 + LN^2 = 2(1-d)(1-b) - (1-d)^2 + (d-b)^2 =$$

$$= 2(1-d)(1-b) + (1-b)(2d-b-1) = (1-b)(2-2d+2d-b-1) = (1-b)^2 = MN^2.$$

Dowód został zakończony.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite $k_1, k_2, \ldots, k_n, K$, przy czym K dzieli się przez każdą z liczb $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Załóżmy, że istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające równanie

$$\frac{K}{k_1} \cdot x_1 + \frac{K}{k_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot x_n = 1.$$

Udowodnić, że istnieją również takie liczby całkowite $y_1, y_2, \ldots, y_n$, że

$$\frac{K}{k_1} \cdot y_1 + \frac{K}{k_2} \cdot y_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot y_n = 1$$

oraz $|y_i| \leqslant k_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że jeżeli $K = 1$, to $k_1 = 1$ i wystarczy przyjąć $y_1 = 1, y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$. Załóżmy dalej, że $K \geqslant 2$. Niech

$$x_i = q_i k_i + r_i, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant r_i < k_i, \quad q_i, r_i \in \mathbf{Z}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wówczas

$$\frac{K}{k_1} \cdot (q_1 k_1 + r_1) + \frac{K}{k_2} \cdot (q_2 k_2 + r_2) + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot (q_n k_n + r_n) = 1,$$

więc

$$\frac{K}{k_1} \cdot r_1 + \frac{K}{k_2} \cdot r_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n = 1 - K(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) = 1 + QK,$$

gdzie $Q = -(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$. Ponieważ $0 \leqslant r_i < k_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to

$$0 \leqslant \frac{K}{k_1} \cdot r_1 + \frac{K}{k_2} \cdot r_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n < \frac{K}{k_1} \cdot k_1 + \frac{K}{k_2} \cdot k_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot k_n = nK.$$

Oznacza to, że $0 \leqslant 1 + QK < nK$, więc $Q < n$. Ponieważ Q jest liczbą całkowitą i $Q \geqslant -\frac{1}{K} \geqslant -\frac{1}{2}$, więc $Q \geqslant 0$. Definiujemy

$$y_i = \begin{cases} r_i - k_i & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant Q \\ r_i & \text{dla } Q + 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany ciąg spełnia warunki zadania. Istotnie, dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzą nierówności

$$-k_i \leqslant r_i - k_i \leqslant y_i \leqslant r_i < k_i,$$

więc $|y_i| \leqslant k_i$. Ponadto

$$\frac{K}{k_1} \cdot y_1 + \frac{K}{k_2} \cdot y_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot y_n = \left(\frac{K}{k_1} \cdot (r_1 - k_1) + \frac{K}{k_2} \cdot (r_2 - k_2) + \ldots + \frac{K}{k_Q}(r_Q - k_Q)\right) +$$
$$+ \left(\frac{K}{k_{Q+1}} r_{Q+1} + \ldots + \frac{K}{r_n} \cdot r_n\right) = \left(\frac{K}{k_1} \cdot r_1 + \frac{K}{k_2} \cdot r_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n\right) - QK = (1 + QK) - QK = 1.$$

□

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2019$. Liczby $1, 2, \ldots, n^2$ wpisano w pola tablicy o wymiarach $n \times n$ tak, że w każde pole została wpisana dokładnie jedna liczba. Udowodnić, że można wybrać n pól w taki sposób, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdowało się dokładnie jedno wybrane pole oraz wśród liczb wpisanych w wybrane pola nie było czterech będących kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Autor zadania: Rami Ayoush

Rozwiązanie:

Niech A oznacza liczbę rosnących, czterowyrazowych ciągów arytmetycznych o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n^2\}$. Każdy taki ciąg jest postaci $(a, a+d, a+2d, a+3d)$, dla pewnych $1 \leqslant a, d \leqslant n^2$. Ponieważ $3d < a + 3d \leqslant n^2$, więc $d < \frac{n^2}{3}$. Liczbę a możemy wybrać na mniej niż n^2 sposobów, zaś d na mniej niż $\frac{n^2}{3}$ sposoby, więc $A < \frac{n^4}{3}$.

Niech P oznacza zbiór tych wyborów n pól, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się jedno wybrane pole, zaś Q niech oznacza zbiór tych wyborów n pól, że wśród liczb wpisanych w wybrane pola istnieje czterowyrazowy ciąg arytmetyczny.

Oczywiście zbiór P ma $n!$ elementów. Oszacujmy liczbę elementów zbioru $P \cap Q$. Każdemu takiemu elementowi odpowiada przynajmniej jeden czterowyrazowy ciąg arytmetyczny. Odwrotnie, jeżeli pola w których wpisano liczby ustalonego czterowyrazowego ciągu arytmetycznego znajdują się w parami różnych wierszach i parami różnych kolumnach, to taki ciąg odpowiada $(n-4)!$ elementom zbioru $P \cap Q$, gdyż pola z pozostałych wierszy i kolumn można wybrać dowolnie na $(n-4)!$ sposobów. W przeciwnym przypadku takiemu ciągowi nie odpowiada żaden element zbioru $P \cap Q$. Oznacza to, że

$$|P \cap Q| \leqslant A \cdot (n-4)! < \frac{n^4}{3} \cdot (n-4)!.$$

Ponieważ

$$\frac{|P|}{|P \cap Q|} > \frac{3n!}{(n-4)!n^4} = \frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} = 3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) \geqslant 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1,$$

więc istnieje element zbioru P, który nie należy do Q, co należało udowodnić. □

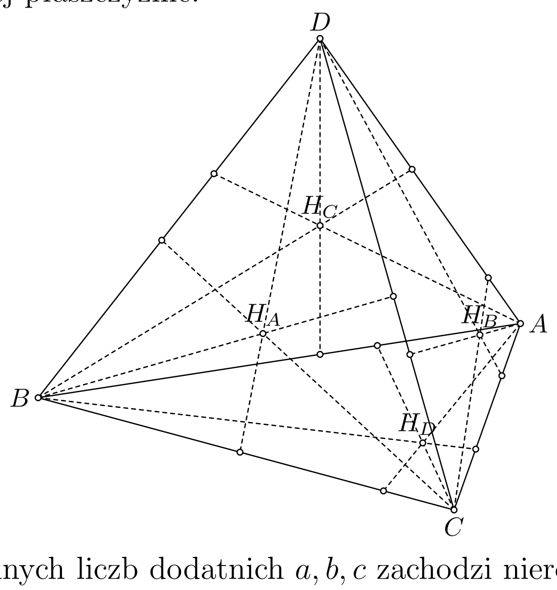
7. Ściany czworościanu $ABCD$ są trójkątami ostrokątnymi, a kąty dwuścienne przy krawędziach AB i CD są proste. Dowieść, że ortocentra trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB leżą na jednej płaszczyźnie.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Niech H_X oznacza ortocentrum ściany YZT dla $\{X, Y, Z, T\} = \{A, B, C, D\}$. Prosta BH_D jest prostopadła do AC, gdyż H_D jest ortocentrum trójkąta ABC. Ponadto BH_A jako prosta zawarta w płaszczyźnie BCD, która na mocy warunków zadania jest prostopadła do płaszczyzny ACD, również jest prostopadła do AC. Wobec tego prosta AC jest prostopadła do prostych BH_D i BH_A, czyli do płaszczyzny BH_AH_D. W szczególności prosta AC jest prostopadła do prostej H_AH_D.

Analogiczne rozumowanie pokazuje, że prosta H_AH_D jest prostopadła do prostej BD. Zatem prosta H_AH_D jest prostopadła do płaszczyzny Π równoległej do prostych AC i BD. Podobnie, prosta H_BH_C jest prostopadła do płaszczyzny Π. Wobec tego H_BH_C i H_AH_D są równoległe, więc w szczególności leżą na jednej płaszczyźnie.



8. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{3+a^4+b^3+c^2}{1+2a^3+3b^2+6c} + \frac{3+b^4+c^3+a^2}{1+2b^3+3c^2+6a} + \frac{3+c^4+a^3+b^2}{1+2c^3+3a^2+6b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:
Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dostajemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej mamy

$$1 + 2x^3 = 1 + x^3 + x^3 \geqslant 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot x^3} = 3x^2$$

oraz

$$4 + 2x^3 = 2 + 2 + 2x^3 \geqslant 3\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2x^3} = 6x.$$

Wobec tego

$$1 + 2a^3 + 3b^2 + 6c \leqslant 1 + 2a^3 + (1 + 2b^3) + (4 + 2c^3) = 2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)$$

i podobnie

$$1 + 2b^3 + 3c^2 + 6a \leqslant 2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3) \quad \text{oraz} \quad 1 + 2c^3 + 3a^2 + 6b \leqslant 2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\frac{3 + a^4 + b^3 + c^2}{1 + 2a^3 + 3b^2 + 6c} + \frac{3 + b^4 + c^3 + a^2}{1 + 2b^3 + 3c^2 + 6a} + \frac{3 + c^4 + a^3 + b^2}{1 + 2c^3 + 3a^2 + 6b} \geqslant \\
&\geqslant \frac{3 + a^4 + b^3 + c^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + b^4 + c^3 + a^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + c^4 + a^3 + b^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} = \\
&= \frac{3 + a^4 + a^3 + a^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + b^4 + b^3 + b^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + c^4 + c^3 + c^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} \geqslant \\
&\geqslant \frac{3 + 3\sqrt[3]{a^2 \cdot a^3 \cdot a^4}}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3\sqrt[3]{b^2 \cdot b^3 \cdot b^4}}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3\sqrt[3]{c^2 \cdot c^3 \cdot c^4}}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} = \\
&= \frac{3 + 3a^3}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3b^3}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3c^3}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} = \frac{3}{2}. \ \square
\end{aligned}$$

Uwaga. $1 + 2x^3 - 3x^2 = (1 - x)(1 + x - 2x^2) = (1 - x)^2(1 + 2x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant 0$; oraz $4 + 2x^3 - 6x = 2(1 - x)(2 - x - x^2) = 2(1 - x)^2(2 + x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant 0$. Użycie nierówności między średnimi nie jest więc konieczne. Główny pomysł polega na oszacowaniu z dołu przez ułamki o tym samym mianowniku: $3 + a^3 + b^3 + c^3$.

9. Dane są takie liczby dodatnie a, b, że liczby $a^2 + b^2$, a^3 i b^3 są wymierne. Udowodnić, że liczby a i b również są wymierne.

Autor zadania: Andrzej Fryszkowski

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$a^2b^2 = \frac{(a^2 + b^2)^3 - (a^3)^2 - (b^3)^2}{3(a^2 + b^2)} \in \mathbb{Q}.$$

Wobec tego $ab = \dfrac{a^3b^3}{a^2b^2}$ jest również liczbą wymierną. Mamy więc

$$a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab} \in \mathbb{Q} \quad \text{oraz} \quad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab} \in \mathbb{Q}.$$

Zatem liczby

$$a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2}$$

są wymierne.

10. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, przy czym $BC = 2AB$. Symetralna boku BC oraz dwusieczna kąta DCB przecinają się w punkcie X. Wykazać, że proste AX i BD są prostopadłe.

Autor zadania: Dominik Burek

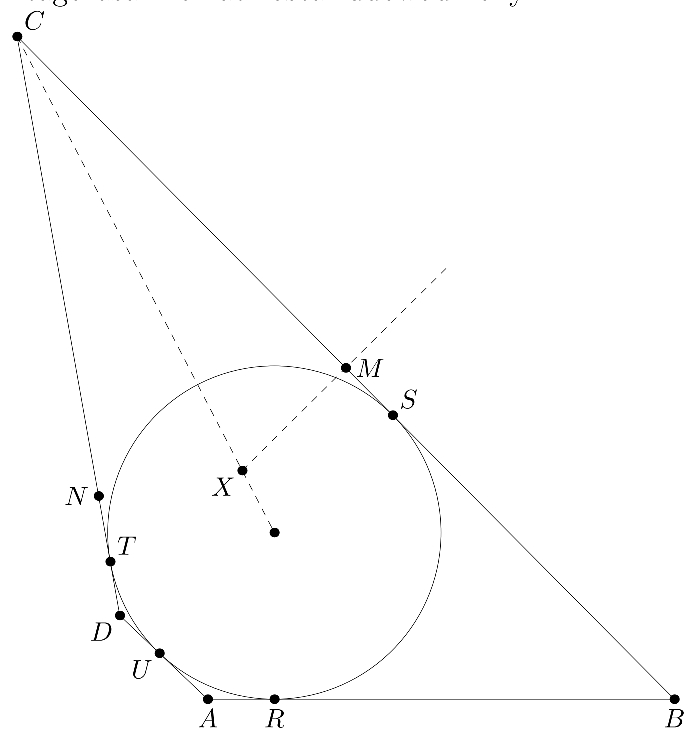
Rozwiązanie. Zaczniemy od sformułowania i udowodnienia pomocniczego twierdzenia.

Lemat.
Jeśli punkty Y i $Z \neq Y$ leżą na płaszczyźnie Π, to dla każdej liczby rzeczywistej r zbiór tych punktów W płaszczyzny Π, dla których zachodzi równość $r = WY^2 - WZ^2$ jest prostą prostopadłą do prostej YZ.

Dowód lematu.
Niech W będzie punktem prostej YZ. Załóżmy, że na prostej YZ wprowadzona został struktura osi liczbowej oraz że współrzędnymi punktów W, Y, Z są liczby w, y, z. Wtedy

$$WY^2 - WZ^2 = (w-y)^2 - (w-z)^2 = (z-y)(2w-y-z).$$

Otrzymane wyrażenie to (niestała) funkcja liniowa zmiennej w, więc przyjmuje ono każdą wartość rzeczywistą dokładnie w jednym punkcie (dla każdej liczby rzeczywistej r istnieje dokładnie jedna taka liczba w, że $r = (z-y)(2w-y-z)$). Oznacza to, że na prostej YZ znajduje się dokładnie jeden taki punkt W_0, że $W_0Y^2 - W_0Z^2 = r$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika natychmiast, że każdemu punktowi W prostej L prostopadłej do YZ przechodzącej przez punkt W_0 przysługuje ta sama własność. Jasne jest też, że jeśli punkt W leży poza prostą L, to $WY^2 - WZ^2 \neq r$ – wystarczy znów zastosować twierdzenie Pitagorasa. Lemat został udowodniony. □



Niech M będzie środkiem boku BC, N takim punktem odcinka CD, że $CN = CM$, R, S, T, U – punktami styczności okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ z bokami AB, BC, CD i DA. Oczywiście $AR = AU$, $BR = BS$, $CS = CT$ i $DT = DU$. Zauważmy, że ponieważ punkt R leży na boku AB, więc $BM = AB > BR = BS$, co oznacza, że punkt M leży między punktami S i C, więc również N leży między T i C. Ponieważ $BM = BA$, więc

$$AU = AR = AB - BR = BM - BS = SM = CS - CM = CT - CN = TN$$

i wobec tego $DN = DT + TN = DU + AU = AD$. Oczywiście $XM \perp CM$. Również $XN \perp CN$ oraz $XM = XN$, bo X leży na dwusiecznej kąta BCD. Mamy zatem

$$XB^2 - XD^2 = (XM^2 + MB^2) - (XN^2 + ND^2) = MB^2 - ND^2 = AB^2 - AD^2.$$

Stąd i z lematu wynika, że punkty A i X leżą na prostej prostopadłej do prostej BD, co kończy dowód. □

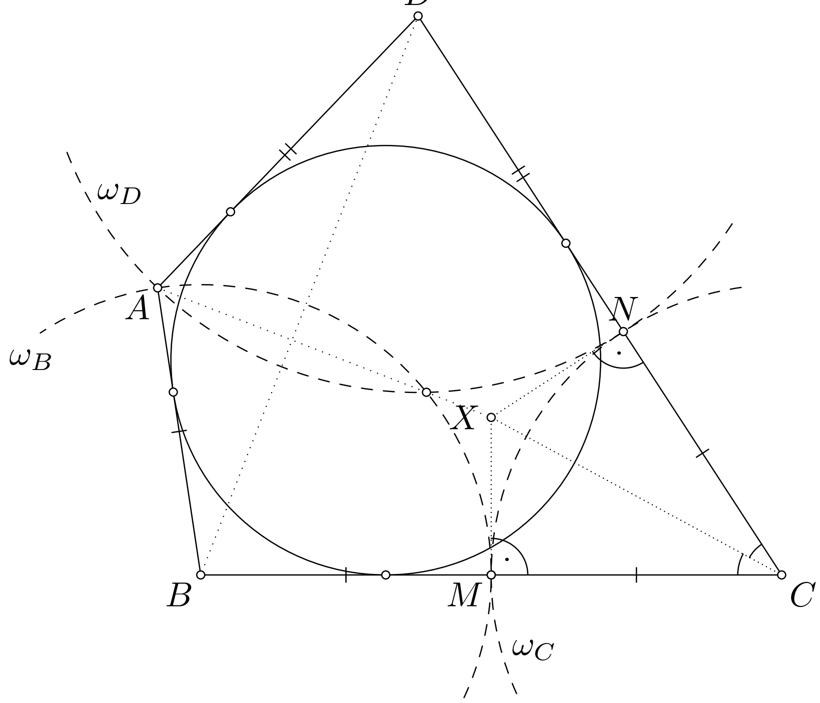
Inne rozwiązanie:
Oznaczmy przez M środek odcinka BC a przez N punkt na odcinku CD taki, że $CN = CM$. Wówczas z warunków zadania mamy równość $AB = BM = MC = CN$. Ponadto z faktu, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wynika że $AB + CD = BC + AD$. Wobec tego

$$2 \cdot AB + DN = AB + CN + DN = AB + CD = BC + AD = 2 \cdot AB + AD,$$

więc $AD = DN$.

Rozpatrzmy okręgi ω_B i ω_C o promieniu AB i środkach w punktach B i C, odpowiednio. Niech ω_D oznacza okrąg o środku w punkcie D i promieniu AD. Na podstawie wyżej pokazanych równości odcinków, okręgi w parach (ω_B, ω_C) i (ω_C, ω_D) są zewnętrznie styczne.

Z definicji punktów M, N, X wynika, że X jest punktem przecięcia się wspólnych stycznych wewnętrznych, a więc osi potęgowych, okręgów w parach (ω_B, ω_C) i (ω_C, ω_D). Korzystając z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla okręgów ω_B, ω_C i ω_D widzimy, że punkt X jest ich środkiem potęgowym. W szczególności AX jest osią potęgową okręgów ω_B i ω_D, więc jest też prostą prostopadłą do prostej BD, która łączy środki okręgów ω_B i ω_D, skąd teza. $\square$



11. Dane są dodatnie liczby całkowite n i k. Na przyjęciu spotkało się n gości, spośród których niektórzy się znają. Okazało się, że każdy gość zna co najwyżej $2k$ innych gości, ale każdych dwóch nieznających się gości ma co najmniej k wspólnych znajomych na przyjęciu. Udowodnić, że $n \leqslant 6k$.

Uwaga: Jeśli gość A zna gościa B, to gość B zna gościa A.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:
Trójkę gości wśród których jeden gość z trójki zna dwóch pozostałych, którzy się nie znają nazwiemy *zbalansowaną*. Gościa należącego do zbalansowanej trójki, który zna dwóch pozostałych gości nazwiemy *popularnym*. Oszacujmy na dwa sposoby liczbę T zbalansowanych trójek gości.

Dla ustalonego gościa A, oszacujmy w ilu zbalansowanych trójkach może być on popularny. Zauważmy, że pozostali dwaj goście z trójki muszą być znajomymi A. Ponieważ A ma co najwyżej $2k$ znajomych, to liczba zbalansowanych trójek w których A jest popularny jest nie większa niż $\binom{2k}{2} = k(2k-1)$. Każda zbalansowana trójka zawiera dokładnie jednego popularnego gościa, więc

$$T \leqslant nk(2k-1).$$

Ustalmy parę gości B, C którzy się nie znają. Z założenia zadania mają oni co najmniej k wspólnych znajomych. Zauważmy, że każdy wspólny znajomy wraz z B i C tworzy zbalansowaną trójkę, więc B i C znajdują się razem w co najmniej k zbalansowanych trójkach. Ponieważ każda osoba zna co najwyżej $2k$ gości, to nie zna co najmniej $n-1-2k$ gości. Wobec tego liczba par osób które się nie znają wynosi co najmniej $\frac{n(n-1-2k)}{2}$. Każda taka para gości znajduje się w co najmniej k zbalansowanych trójkach, więc

$$T \geqslant k \cdot \frac{n(n-1-2k)}{2}.$$

Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy, że

$$k \cdot \frac{n(n-1-2k)}{2} \leqslant T \leqslant nk(2k-1),$$

więc

$$0 \leqslant \frac{nk}{2}(4k-2-(n-1-2k)) = \frac{nk}{2}(6k-1-n).$$

Oznacza to, że $6k-1 \geqslant n$, skąd teza. □

12. Wszystkie liczby postaci x^2+y^2, gdzie $x, y > 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, ustawmy w ciąg rosnący $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots$ Przykładowo:

$$z_1 = 2 = 1^2+1^2,\ z_2 = 5 = 2^2+1^2,\ z_3 = 10 = 3^2+1^2,\ z_4 = 13 = 3^2+2^2,\ \ldots$$

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczby $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+2019}$ są nieparzyste.

Autorzy zadania: Wojciech Nadara, Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Niech

$$A := 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4039^2-2).$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k mamy

$$\mathrm{NWD}(kA+1, 1) = \mathrm{NWD}(kA+1, 3) = \mathrm{NWD}(kA+1, 5) = \ldots = \mathrm{NWD}(kA+1, 4039) = 1,$$

więc liczby

$$(kA+1)^2+1^2,\ (kA+1)^2+3^2,\ (kA+1)^2+5^2,\ \ldots,\ (kA+1)^2+4039^2$$

są elementami ciągu $(z_n)_{n\geqslant 1}$. Ponadto jeśli k jest liczbą nieparzystą, to wyżej wypisane liczby również są nieparzyste.

Dla $k \geqslant 1$ niech n_k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $z_{n_k} = (kA+1)^2+1$. Oczywiście liczby $(n_k)_{k\geqslant 1}$ są parami różne. Udowodnimy, że liczby $(n_k)_{k\geqslant 1}$ dla nieparzystych k spełniają warunki zadania.

Ponieważ liczby

$$(kA+1)^2+1^2,\ (kA+1)^2+3^2,\ (kA+1)^2+5^2,\ \ldots,\ (kA+1)^2+4039^2$$

są nieparzyste i są elementami ciągu $(z_n)_{n\geqslant 1}$, więc wystarczy dowieść, że $(kA+1)^2+\ell$ nie jest elementem ciągu $(z_n)_{n\geqslant 1}$ dla nieparzystego k i $\ell \in \{2, 4, 6, \ldots, 4039^2-1\}$. Przypuśćmy więc, że

$$(kA+1)^2+\ell = x^2+y^2,$$

dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wystarczy dowieść, że $\mathrm{NWD}(x, y) > 1$, co pozwoli na stwierdzenie, że liczba $(kA+1)^2+\ell = x^2+y^2$ nie występuje w ciągu $(z_n)_{n\geqslant 1}$.

Rozpatrzmy dwa przypadki:
1° $4 \mid \ell$. Wtedy $4 \mid (kA+1)^2+\ell$, więc $4 \mid x^2+y^2$. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4, to $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod 4$. Zatem x i y są liczbami parzystymi, więc $\mathrm{NWD}(x,y) > 1$.
2° $\ell \equiv 2 \pmod 4$.

W rozważanym przypadku mamy $\ell+1 \equiv 3 \pmod 4$. Liczba $\ell+1$ ma więc dzielnik pierwszy p postaci $4m+3$ dla pewnej liczby nieujemnej całkowitej m. Ponieważ $\ell < 4039^2$ i $p \mid \ell+1$, więc $p < 4039^2$, zatem $p \mid A$. Wobec tego

$$x^2+y^2 = (kA+1)^2+\ell \equiv 0 \pmod p.$$

Z lematu pierwszego, który jest sformułowany i udowodniony poniżej, wynika więc, że $p \mid x$ i $p \mid y$, czyli $\mathrm{NWD}(x,y) \geqslant p > 1$.

Inne rozwiązanie:
W rozwiązaniu przyda się nam następujący:

Lemat 1.
Niech n będzie liczbą całkowitą, $p = 4\ell+3$ – liczbą pierwszą, $\ell \in \mathbf{Z}$. Wówczas jeśli $n = x^2+y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y, to $p \mid x$ i $p \mid y$. W szczególności $\mathrm{NWD}(x,y) > 1$.

Dowód lematu 1.
Przypuśćmy, że $n = x^2+y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Jeśli $p \mid x$, to $p \mid n - x^2 = y^2$, więc $p \mid y$, skąd teza. Dowód w przypadku $p \mid y$ jest analogiczny. W dalszym ciągu $p \nmid x$ i $p \nmid y$. Ponieważ $p \mid n$, to $x^2 \equiv -y^2 \pmod p$. Podnosimy obustronnie kongruencję do potęgi $\dfrac{p-1}{2} = 2\ell+1$ i otrzymujemy

$$x^{p-1} \equiv -y^{p-1} \pmod p.$$

Z małego twierdzenia Fermata wnioskujemy, że $x^{p-1} \equiv 1 \equiv y^{p-1} \pmod p$, zatem $1 \equiv -1 \pmod p$, co jest niemożliwe. Udowodniliśmy lemat.

Wykorzystamy jeszcze jeden lemat, ale przed jego sformułowaniem przypomnimy dwie definicje.

Definicja 1.
Liczba całkowita r nazywana jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita x, że $x^2 \equiv r \pmod p$. Liczby, które nie są resztami kwadratowymi nazywane są nieresztami kwadratowymi modulo p.

Każda liczba jest resztą kwadratową modulo 2. Euler udowodnił, że jeśli $p > 2$ jest liczbą pierwszą i $p \nmid a$, to a jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ oraz $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest nieresztą kwadratową modulo p.

Definicja 2. (symbolu Legendre'a)
Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dla każdej liczby całkowitej a definiujemy

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad a \not\equiv 0 \pmod p \quad \text{oraz } a \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ -1 & \text{gdy} \quad a \not\equiv 0 \pmod p \quad \text{oraz } a \text{ jest nieresztą kwadratową modulo } p; \\ 0 & \text{gdy} \quad a \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Zachodzi ważny wzór $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$. Z twierdzenia Eulera zacytowanego przed definicją 2 wynika, że $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$. Jeśli p, q są różnymi liczbami pierwszymi, to zachodzi wzór

$$\text{(Q)} \qquad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

zwany prawem wzajemności reszt kwadratowych, którego znaczenie trudno przecenić. Więcej o tym przeczytać można w większości książek poświęconych elementarnej teorii liczb, również w Wikipedii. Dodajmy, że wielu miejscach symbol Legendre'a jest definiowany przy założeniu, że $p \nmid a$

Lemat 2.

Niech n będzie nieparzystą dodatnią liczbą całkowitą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wówczas istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p postaci $4\ell + 3$, dla których n nie jest resztą kwadratową modulo p.

Dowód lematu 2.

Niech $n = m^2 q_1 q_2 \ldots q_s$, gdzie $q_1, q_2, \ldots, q_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi i niech $p > n$ będzie dowolną liczbą pierwszą postaci $4\ell + 3$. Mamy $\left(\frac{p}{q_i}\right)\left(\frac{q_i}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q_i-1)}{4}}$ oraz $\left(\frac{p}{q_i}\right)^2 = 1$, więc $\left(\frac{q_i}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q_i-1)}{4}}\left(\frac{p}{q_i}\right) = (-1)^{(2\ell+1)\frac{(q_i-1)}{2}}\left(\frac{p}{q_i}\right) = (-1)^{\frac{(q_i-1)}{2}}\left(\frac{p}{q_i}\right)$ i wobec tego

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{q_i}{p}\right) = \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{p}{q_i}\right)(-1)^{\frac{q_i-1}{2}}.$$

Przypuśćmy, że p spełnia następujący układ kongruencji

$$\begin{cases} p \equiv 3 \pmod 4 \\ p \equiv -x \pmod{q_1} \\ p \equiv -1 \pmod{q_i} \text{ dla } i = 2, 3, \ldots, s \end{cases},$$

gdzie x jest dowolną nieresztą kwadratową modulo q_1. Wówczas

$$\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{p}{q_i}\right)(-1)^{\frac{q_i-1}{2}} = \left(\frac{x}{q_1}\right)\prod_{i=1}^{s}(-1)^{q_i-1} = -1,$$

więc n jest nieresztą kwadratową modulo p. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika istnienie takiej liczby a względnie pierwszej z $4q_1q_2\ldots q_s$, że $p \equiv a \pmod{4q_1q_2\ldots q_s}$. Z twierdzenia Dirichleta, według którego każdy ciąg arytmetyczny o wyrazie $a + mb$, przy czym $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$ (u nas $b = 4q_1q_2\ldots q_s$), zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych wynika, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p spełniających taką kongruencję. Stąd wynika teza lematu 2. $\square$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Udowodnimy, że można tak dobrać dodatnią liczbę całkowitą N, że liczby

$$a_0 = N^2 + (N+1)^2, a_1 = (N-1)^2 + (N+2)^2, \ldots, a_{2019} = (N-2019)^2 + (N+2020)^2$$

są kolejnymi wyrazami ciągu (z_n). Ponieważ wszystkie te liczby są nieparzyste wynika stąd teza zadania.

Po pierwsze niech $N \equiv 0 \pmod{4039!}$. Wówczas dla dowolnego $k = 0, 1, \ldots, 2019$, mamy

$$\mathrm{NWD}(N-k, N+k+1) = \mathrm{NWD}(N-k, 2k+1) = \mathrm{NWD}(k, 2k+1) = 1.$$

Oznacza to, że liczby $a_0, a_1, \ldots, a_{2019}$ są sumami kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych, więc są wyrazami ciągu (z_n).

Niech m będzie taką liczbą całkowitą, że $a_0 \leqslant m \leqslant a_{2019}$ i $m \neq a_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, 2019$. Ponieważ, $a_0 = 2N^2 + 2N + 1$ zaś $a_{2019} = 2N^2 + 2N + 2019^2 + 2020^2$, to

$$m = 2N^2 + 2N + k, \text{ dla pewnego } 1 \leqslant k \leqslant 2019^2 + 2020^2.$$

Udowodnimy, że liczba $2k - 1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. Przypuśćmy przeciwnie, niech $2k - 1 = (2t+1)^2$ dla pewnego t. Ponieważ $1 \leqslant 2k - 1 \leqslant 2(2019^2 + 2020^2) - 1 = 4039^2$, więc $0 \leqslant t \leqslant 2019$. Oznacza to, że

$$m = 2N^2 + 2N + k = 2N^2 + 2N + (2t^2 + 2t + 1) = (N-t)^2 + (N+t+1)^2 = a_t,$$

wbrew założeniu.

Z lematu drugiego wynika, że istnieje taka liczba pierwsza $p_k > 4039$ postaci $4\ell + 3$, że $2k - 1$ jest nieresztą kwadratową modulo p_k. Ponieważ -1 jest nieresztą kwadratową modulo p_k, więc $(-1)(2k-1) = 1-2k$ jest resztą kwadratową modulo p_k (jako iloczyn dwóch niereszt kwadratowych). Niech x_k będzie taką liczbą całkowitą, że $x_k^2 \equiv (1-2k) \pmod{p_k}$ i dobierzmy N tak, aby $2N+1 \equiv x_k \pmod{p_k}$. Mamy

$$2N^2 + 2N + k = \frac{1}{2}((2N+1)^2 - (1-2k)) \equiv \frac{1}{2}(x_k^2 - (1-2k)) \equiv 0 \pmod{p_k}.$$

Liczba $2N^2+2N+k$ jest podzielna przez liczbę pierwszą postaci $4l+3$, więc nie jest sumą kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych – lemat pierwszy.

Zauważmy, że ponieważ lemat drugi gwarantuje istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych o żądanej własności, to możemy wybrać liczby $p_2, p_3, \ldots, p_{2019^2+2020^2-1}$ parami różne i większe od 4039.

Oznacza to, że jeżeli N spełnia warunki

$$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod{4039!} \\ N \equiv \frac{x_2-1}{2} \pmod{p_2} \\ \ldots \\ N \equiv \frac{x_{2019^2+2020^2-1}-1}{2} \pmod{p_{2019^2+2020^2-1}} \end{cases},$$

to $a_0, a_1, \ldots, a_{2019}$ są sumami kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych. Ponadto, żadna inna liczba większa od a_0 i mniejsza niż a_{2019} nie jest sumą kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych. Zatem liczby $a_0, a_1, \ldots, a_{2019}$ to kolejne wyrazy ciągu (z_n). Istnienie takiego N wynika wprost z chińskiego twierdzenia o resztach. $\square$