LXX Olimpiada Matematyczna

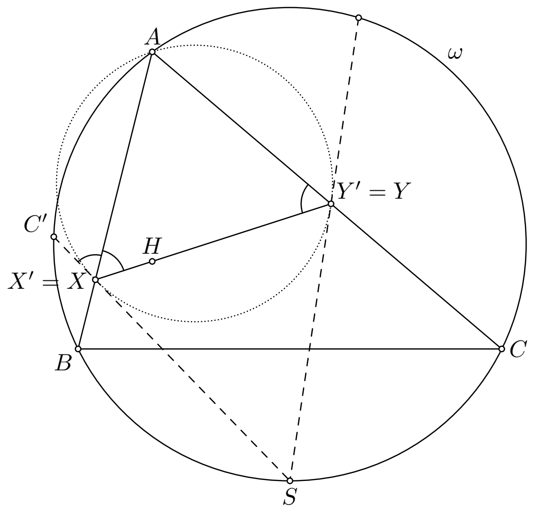
Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC. Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P. Dowieść, że punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



Niech C' będzie punktem symetrycznym względem prostej AB do ortocentrum trójkąta ABC, punktu H. Wtedy

$$\sphericalangle BC'A = \sphericalangle BHA = 180^\circ - \sphericalangle BAH - \sphericalangle HBA = \\ = 180^\circ - \sphericalangle HCB - \sphericalangle ACH = 180^\circ - \sphericalangle ACB,$$

więc C' leży na okręgu ω opisanym na trójkącie ABC.

Oznaczmy przez S środek krótszego łuku BC okręgu ω, który jest zarazem punktem przecięcia dwusiecznej kąta BAC z ω. Niech prosta $C'S$ przecina AB w punkcie X'. Wówczas

$$\sphericalangle HX'A = \sphericalangle AX'C' = \sphericalangle BC'S + \sphericalangle ABC' = \sphericalangle BAS + \sphericalangle HBA = \\ = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + 90^\circ - \sphericalangle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC,$$

po drodze skorzystaliśmy z definicji punktu C' i równości kątów wpisanych opartych na łuku BS okręgu ω.

Wobec tego, jeśli prosta $X'H$ przecina prostą AC w punkcie Y', to $\sphericalangle Y'X'A = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ oraz

$$\sphericalangle AY'X' = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAC\right) = \\ = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle Y'X'A,$$

skąd dostajemy równość $AX' = AY'$, więc $X = X'$ i $Y = Y'$, gdyż punkty X, Y są wyznaczone przez warunki zadania jednoznacznie.

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle AXC' = \sphericalangle YXA = \sphericalangle AYX$, więc z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą otrzymujemy, że prosta XS jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punkcie X. Analogicznie dowodzimy, że prosta YS jest styczna do tego okręgu w punkcie Y. Oznacza to, że styczne w punktach X i Y do okręgu opisanego na trójkącie AXY przecinają się w punkcie S leżącym na okręgu ω – to kończy rozwiązanie. □

Uwaga: Można wykazać następujące twierdzenie Steinera: W trójkącie ABC, prosta ℓ przechodzi przez jego ortocentrum H. Wówczas obrazy prostej ℓ w symetrii względem boków trójkąta przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC. W naszym zadaniu obrazy prostej XY względem AB i AC, to oczywiście styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY, więc z powyższego twierdzenia dostajemy tezę zadania.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita r, że liczba $r^7 - 1$ jest podzielna przez p. Ponadto istnieją takie liczby całkowite a oraz b, że liczby $r + 1 - a^2$ oraz $r^2 + 1 - b^2$ są podzielne przez p. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita c, że liczba $r^3 + 1 - c^2$ jest podzielna przez p.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Jeżeli $p \mid r-1$, to $p \mid r+1-a^2+(r-1)(r^2+r) = r^3+1-a^2$, więc możemy przyjąć $c=a$.

Załóżmy, że $p \nmid r-1$. Wówczas z podzielności

$$p \mid r^7-1 = (r-1)(r^6+r^5+\ldots+1)$$

wynika, że $p \mid r^6+r^5+\ldots+1$. Rozważmy iloczyn

$$(r+1)(r^2+1)(r^3+1)r^4 = (r+1)(r^2+1)(r^7+r^4) \equiv (r+1)(r^2+1)(r^4+1) =$$
$$= 1+r+\ldots+r^6+r^7 \equiv r^7 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ponieważ $r+1 \equiv a^2 \pmod{p}$ i $r^2+1 \equiv b^2 \pmod{p}$, więc

$$(r^3+1)a^2b^2r^4 \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1}$$

Przyjmijmy $c=(r^3+1)abr^2$, wówczas

$$r^3+1-c^2 = (r^3+1)(1-(r^3+1)a^2b^2r^4).$$

Z kongruencji (1) wynika, że wyrażenie w drugim nawiasie jest podzielne przez p, więc $p \mid r^3+1-c^2$. $\square$

3. Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a,b,c,d, że w parach $\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a,c\},\{b,d\}$ goście się nie znają.

Maksymalną kliką na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X. Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik.

Uwaga: Jeśli gość a zna gościa b, to gość b zna gościa a.

Zadanie zaproponował: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n. Dla $n=3$ nietrudno zauważyć, że nie da się wybrać czterech podzbiorów gości, tak aby żaden nie był nadzbiorem innego. Oznacza to, że niezależnie od znajomości liczba maksymalnych klik wynosi co najwyżej trzy.

Niech G będzie n-elementowym zbiorem gości na przyjęciu. Wybierzmy dowolnego gościa $a \in G$, który zna przynajmniej jednego innego gościa. Jeżeli taki gość nie istnieje to wszystkie maksymalne kliki w G składają się z jednego gościa i jest ich $n \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

Rozważmy pewną maksymalną klikę L w $G \setminus \{a\}$. Zauważmy, że jeżeli a nie zna któregoś z gości z L, to L jest również maksymalną kliką w G. Natomiast jeżeli a zna wszystkich gości z L, to $L \cup \{a\}$ jest maksymalną kliką w G.

Niech K będzie maksymalną kliką w G, dla której nie istnieje taka maksymalna klika L w $G \setminus \{a\}$, że $K=L$ lub $K=L\cup\{a\}$. Wówczas $a \in K$, gdyż w przeciwnym razie K jest maksymalną kliką w $G\setminus\{a\}$. Ponieważ a ma jakiegoś znajomego, to zbiór $K\setminus\{a\}$ jest nie pusty. Z założenia $K\setminus\{a\}$ jest kliką, która nie jest maksymalną kliką w $G\setminus\{a\}$, więc istnieje taki gość $c \in G\setminus\{a\}$, który zna wszystkich gości z $K\setminus\{a\}$. Udowodnimy, że $K\setminus\{a\}$ jest zbiorem wspólnych znajomych a i c.

Goście a i c się nie znają, gdyż w przeciwnym razie $K\cup\{c\}$ byłaby większą kliką w G, wbrew maksymalności K. Przypuśćmy, że istnieje taka osoba b która zna a i c, ale $b \notin K\setminus\{a\}$. Gość b nie zna pewnego gościa z K, gdyż w przeciwnym razie $K\cup\{b\}$ byłaby kliką zawierającą K. Niech $d \in K\setminus\{a\}$ będzie gościem którego nie zna b. Wówczas goście w parach $\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}$ i $\{d,a\}$ się znają, zaś $\{a,c\}$ i $\{b,d\}$ się nie znają. Zgodnie z warunkiem danym w zadaniu taka sytuacja jest niemożliwa, więc istotnie $K\setminus\{a\}$ jest zbiorem wspólnych znajomych a i c.

Podsumowując, udowodniliśmy, że każda maksymalna klika w G albo odpowiada jednoznacznie pewnej klice w $G\setminus\{a\}$, albo jest zbiorem wspólnych znajomych a i pewnej osoby $c \neq a$. Z założenia indukcyjnego tych pierwszych klik jest co najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Każda z pozostałych maksymalnych klik jest wyznaczona jednoznacznie przez pewnego gościa różnego od a, jest ich więc co najwyżej $n-1$. Oznacza to, że liczba maksymalnych klik w G jest nie większa niż

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Co kończy dowód kroku indukcyjnego. $\square$

(db,mg)

LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są dodatnie liczby całkowite n, k, ℓ oraz taka różnowartościowa funkcja σ o argumentach i wartościach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$, że dla każdej liczby $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liczba $\sigma(x) - x$ jest równa k lub $-\ell$. Dowieść, że liczba n jest podzielna przez $k + \ell$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech s będzie liczbą całkowitą, oznaczamy przez A_s zbiór takich $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że $k + \ell \mid x - s$. Zauważmy, że

$$x \in A_s \Rightarrow \sigma(x) \in A_{s+k}. \tag{2}$$

Istotnie, liczba $\sigma(x) - (s + k)$ jest równa $x + k - (s + k) = x - s$ lub $x - \ell - (s + k) = x - s - (k + \ell)$, więc jest podzielna przez $k + \ell$. Ponieważ funkcja σ jest różnowartościowa, to z warunku (2) wynika nierówność

$$|A_s| \leqslant |A_{s+k}|, \tag{3}$$

gdzie przez $|\cdot|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru.

Przypuśćmy, że $k + \ell \nmid n$, wówczas $n = q(k + \ell) + r$, dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych q, r spełniających warunek $1 \leqslant r < k + \ell$. Zauważmy, że

$$|A_s| = \begin{cases} q + 1 & \text{dla} \quad 1 \leqslant s \leqslant r \\ q & \text{dla} \quad r + 1 \leqslant s \leqslant k + \ell \end{cases}.$$

W szczególności $|A_1| = q + 1$ i $|A_{r+1}| = q$. Z nierówności (3) mamy $|A_1| \leqslant |A_{k+1}|$, więc $|A_{k+1}| = q + 1$ i w konsekwencji $k + 1 \leqslant r$. Oznacza to, że $1 \leqslant r + 1 - k \leqslant r$, więc $|A_{r+1-k}| = q + 1$. Korzystając ponownie z (3) otrzymujemy

$$q + 1 = |A_{r+1-k}| \leqslant |A_{r+1}| = q \text{ — sprzeczność, skąd teza.} \qquad \square$$

5. Dane są liczby dodatnie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniające warunki: a_0 jest liczbą całkowitą, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 1$ oraz $a_i \leqslant a_{i-1} + 1$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnić, że

$$n \leqslant 4a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Sposób I: Na początek zauważmy, że stosując wielokrotnie warunek dany w zadaniu dostajemy, że $a_i \leqslant a_0 + i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zauważamy, że $n < 3a_0$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_0 + i} \geqslant \sum_{i=1}^{a_0} \frac{1}{a_0 + i} + \sum_{i=a_0+1}^{2a_0} \frac{1}{a_0 + i} + \sum_{i=2a_0+1}^{3a_0} \frac{1}{a_0 + i} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_0}{2a_0} + \frac{a_0}{3a_0} + \frac{a_0}{4a_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1,$$

sprzeczność z założeniem. W związku z tym otrzymujemy, że

$$4a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant 4a_0 \cdot \frac{n}{a_0 + n} \geqslant 4a_0 \cdot \frac{n}{4a_0} = n.$$

Sposób II: Udowodnimy, że stałą 4 z treści zadania można zastąpić przez $\frac{12}{5}$, której nie można już zmniejszyć.

Odnotujmy po pierwsze, że jeżeli $n = 1$, to

$$\frac{12}{5} \cdot \frac{a_0}{a_1} > \frac{2a_0}{a_0 + 1} \geqslant 1.$$

Przyjmijmy dalej, że $n \geqslant 2$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną dla parami różnych liczb $\frac{1}{a_0+1}, \frac{1}{a_0+2}, \ldots, \frac{1}{a_0+n}$, dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_0 + i} > \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_0 + i)} = \frac{n^2}{na_0 + \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{2a_0 + 1 + n}.$$

Wobec tego

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_0 + i} > \frac{2n}{2a_0 + 1 + n},$$

więc $2a_0 + 1 > n$. Ponieważ a_0 jest liczbą całkowitą, to $2a_0 \geqslant n$.

Przejdźmy do dowodu żądanej nierówności. Mamy

$$\frac{12}{5}a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{24na_0}{5(2a_0+1+n)} = n\left(1 + \frac{5(2a_0-n)+(4a_0-5)}{5(2a_0+1+n)}\right).$$

Jeżeli $2a_0 > n$ lub $a_0 > 1$, to $5(2a_0 - n) + (4a_0 - 5) > 0$ i teza zadania jest spełniona. W przeciwnym razie mamy $a_0 = 1$ i $n = 2$. Wówczas

$$\frac{12}{5}a_0\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geqslant \frac{12}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2 = n.$$

Przy czym równość zachodzi gdy $a_1 = 2$ i $a_2 = 3$. $\square$

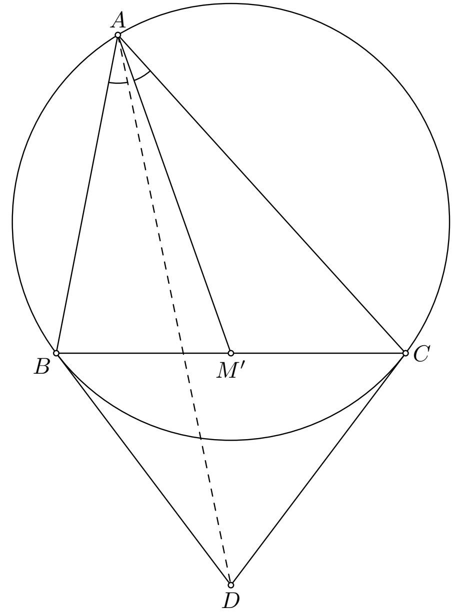
6. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC. Punkt D jest środkiem tego łuku BC okręgu Ω, który nie zawiera punktu A. Okrąg ω o środku w punkcie D jest styczny do odcinka BC w punkcie E. Proste styczne do okręgu ω przechodzące przez punkt A przecinają prostą BC w punktach K i L, przy czym punkty B, K, L, C leżą w tej kolejności na prostej BC. Okrąg γ_1 jest styczny do odcinków AL i BL oraz do okręgu Ω w punkcie M. Okrąg γ_2 jest styczny do odcinków AK i CK oraz do okręgu Ω w punkcie N. Proste KN i LM przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle KAP = \sphericalangle EAL$.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący lemat, znany jako twierdzenie o symedianie.

Lemat. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o, przy czym $\sphericalangle BAC < 90^\circ$. Punkt M jest środkiem boku BC, zaś punkt D punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach B i C. Wówczas prosta AD jest symetryczna do prostej AM względem dwusiecznej kąta BAC. (Prostą AD nazywamy *symedianą* trójkąta ABC).



Dowód. Niech M' będzie punktem przecięcia prostej symetrycznej do AD względem dwusiecznej kąta BAC z odcinkiem BC. Wtedy, korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkątów ABM' i $AM'C$ dostajemy

$$\frac{CM'}{M'B} = \frac{CM'}{AM'} \cdot \frac{AM'}{M'B} = \frac{\sin\sphericalangle M'AC}{\sin\sphericalangle BCA} \cdot \frac{\sin\sphericalangle CBA}{\sin\sphericalangle BAM'} = (*).$$

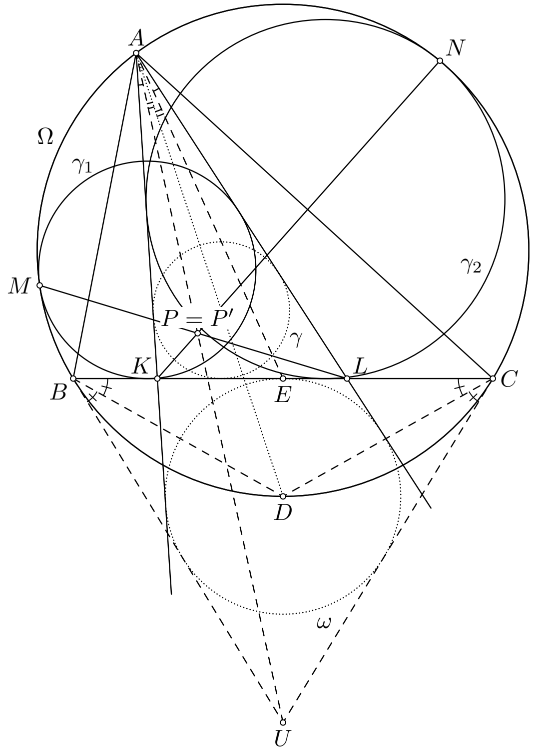
Ponieważ proste DB i DC są styczne do okręgu o, to z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że

$$\sphericalangle DBA = 180^\circ - \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ACD = 180^\circ - \sphericalangle CBA.$$

Mamy więc

$$(*) = \frac{\sin\sphericalangle DAB}{\sin\sphericalangle DBA} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ACD}{\sin\sphericalangle DAC} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} = 1,$$

w przedostatniej równości wykorzystaliśmy twierdzenie sinusów dla trójkątów ABD i ADC. Otrzymaliśmy, że $CM' = M'B$, więc punkt M' jest środkiem odcinka BC, stąd teza. $\square$



Przejdźmy do rozwiązania zadania. Oznaczmy przez U punkt przecięcia stycznych do Ω w punktach B i C. Zauważmy, że

$$\measuredangle UBD = \measuredangle BCD = \measuredangle DBC = \measuredangle DCU,$$

gdzie w pierwszej i ostatniej równości wykorzystaliśmy twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą. Wobec tego proste BD i CD są odpowiednio dwusiecznymi kątów UBC i BCU, więc okrąg ω jest wpisany w trójkąt UBC.

Wykorzystując twierdzenie o symedianie widzimy, że prosta AU jest symedianą w trójkącie ABC. Ponieważ AE jest środkową trójkąta ABC, więc proste AU i AE są symetryczne względem dwusiecznej AD kąta BAC. Proste AK i AL są również symetryczne względem AD, gdyż punkt D jest środkiem okręgu ω wpisanego w kąt KAL. Wobec tego, aby wykazać równość kątów KAP i EAL wystarczy wykazać, że punkty A, P i U są współliniowe.

Wiadomo, że dla każdej pary nieprzystających okręgów o_1, o_2 istnieje dokładnie jedna jednokładność j o dodatniej skali przekształcająca o_1 na o_2. Ponadto, zachodzi następujące twierdzenie o składaniu jednokładności (znane również jako twierdzenie Monge'a):

Twierdzenie. Złożenie dwóch jednokładności jest albo jednokładnością o skali będącej iloczynem wyjściowych skal i środku współliniowym ze środkami składanych jednokładności, albo przesunięciem, jeśli iloczyn wyjściowych skal jest równy 1. (zob. L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego, Warszawa 2000, Dodatek D, str. 114)

Niech γ będzie okręgiem wpisanym w trójkąt AKL. Okręgi γ i Ω mają różne promienie, więc istnieje jednokładność j_1 o dodatniej skali i środku w pewnym punkcie P', która przekształca Ω w γ. Okręgi γ i γ_1 są wpisane w kąt ALB, więc istnieje jednokładność j_2 o środku w punkcie L i dodatniej skali, która przeprowadza okrąg γ w γ_1.

Niech $k := j_2 \circ j_1$. Z twierdzenia o składaniu jednokładności wynika, że k jest albo jednokładnością, której środek leży na prostej $P'L$, albo przesunięciem. Ponieważ k przekształca Ω w γ_1, to nie może być przesunięciem, gdyż okręgi te mają różne promienie, więc k jest jednokładnością. Ponieważ okręgi Ω i γ_1 są styczne wewnętrznie w punkcie M, to istnieje jednokładność o środku w M i dodatniej skali przekształcająca Ω w γ_1. Ponieważ jednokładność o dodatniej skali przekształcająca Ω w γ_1 jest jedyna, to jest nią k. Oznacza to, że punkt M leży na prostej $P'L$, więc punkty L, M, P' są współliniowe. Analogicznie wykazujemy, że punkty K, N, P' są współliniowe, więc $P = P'$.

Okręgi Ω i ω są wpisane w kąt BUC, więc istnieje jednokładność ℓ_1 o środku w U i dodatniej skali, która przekształca Ω w ω. Okręgi ω i γ są wpisane w kąt KAL, więc istnieje jednokładność ℓ_2 o środku w A i dodatniej skali, która przeprowadza ω w γ.

Niech $m := \ell_2 \circ \ell_1$. Z twierdzenia o składaniu jednokładności wynika, że m jest albo jednokładnością której środek leży na prostej AU, albo przesunięciem. Ponieważ m przekształca Ω w γ, więc nie może być przesunięciem, gdyż okręgi Ω i γ_1 nie są przystające. Jedyną jednokładnością o dodatniej skali przekształcającą Ω w γ jest j_1, więc $m = j_1$. Oznacza to, że środkiem jednokładności m jest punkt P, więc P leży na prostej AU — co kończy dowód zadania. $\square$

(db,mg)

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ptm rok zał. 1919