LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2018 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

2. Dany jest n-elementowy podzbiór S płaszczyzny składający się z punktów o obu współrzędnych całkowitych, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Różnowartościowa funkcja $f\colon S \to S$ spełnia następujący warunek: dla każdej pary punktów $A, B \in S$, odległość między punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest nie większa niż odległość między punktami A i B. Wykazać, że istnieje taki punkt $X \in S$, że $f(X) = X$.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c, dla których istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f(f(x)+f(y))+cxy=f(x+y).$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2018 r. (drugi dzień zawodów)

4. Liczbę całkowitą nazwiemy *bezkwadratową*, jeśli nie jest ona podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przyjmijmy, że w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ jest dokładnie M takich liczb bezkwadratowych k, że liczba $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ jest nieparzysta. Wykazać, że liczba M jest nieparzysta.

Uwaga: Dla danej liczby rzeczywistej x, przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A.

6. Dana jest liczba pierwsza p większa od 3. Niech K oznacza liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, p\}$, że liczba

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

jest podzielna przez p. Udowodnić, że liczba $K + p$ jest podzielna przez p^2.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.