LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ABC, przy czym spełniona jest równość $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie S różnym od R. Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC.

2. Ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ składający się z parami różnych pól szachownicy o wymiarach $n \times n$ nazwiemy *cyklem*, jeśli $k \geqslant 4$ oraz pola a_i i a_{i+1} mają wspólny bok dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $a_{k+1} = a_1$. Podzbiór X pól tej szachownicy nazwiemy *złośliwym*, jeśli każdy cykl na niej zawiera co najmniej jedno pole należące do X.

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ na szachownicy o wymiarach $n \times n$ istnieje podzbiór złośliwy składający się z co najwyżej Cn^2 pól.

3. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2a_1 .$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$, to

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m .$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wykazać, że zbiór dodatnich liczb całkowitych $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ można przedstawić w postaci sumy pięciu parami rozłącznych podzbiorów o następującej własności: każda piątka liczb postaci $(n, 2n, 3n, 4n, 5n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}^+$, zawiera po jednej liczbie z każdego z tych pięciu podzbiorów.

5. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L. Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

6. Dane są takie trzy ciągi nieujemnych liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, $(c_0, c_1, \ldots, c_{2n})$, że dla wszystkich $0 \leqslant i, j \leqslant n$ zachodzi nierówność $a_i b_j \leqslant (c_{i+j})^2$. Wykazać, że

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j \leqslant \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2 .$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.