LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. *We wnętrzu trójkąta o bokach długości* $3, 4, 5$ *leży punkt* P. *Wykazać, że jeżeli odległości* P *od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości* P *od boków też.*

Rozwiązanie

Trójkąt można umieścić w prostokątnym układzie współrzędnych tak, by jego wierzchołkami były punkty $A = (4, 0)$, $B = (0, 3)$ i $C = (0, 0)$ (trójkąt ABC jest prostokątny, gdyż $3^2 + 4^2 = 5^2$). Niech $P = (x, y)$. Odległość punktu P od wierzchołka A jest równa $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, a ponieważ jest to liczba wymierna, więc również liczba $(x-4)^2 + y^2$ jest wymierna. Wymierne są też liczby $x^2 + (y-3)^2$ oraz $x^2 + y^2$, jako kwadraty odległości od wierzchołków B i C.

Ponieważ różnica liczb wymiernych jest wymierna, więc wymierne są też obie liczby $x^2 + y^2 - \big((x-4)^2 + y^2\big) = 8x - 16$ i $x^2 + y^2 - \big(x^2 + (y-3)^2\big) = 6y - 9$, zatem również liczby x i y, czyli odległości od boków BC i AC. Równanie prostej AB wygląda tak: $3x + 4y - 12 = 0$. Wobec tego odległość punktu P od boku AB jest równa

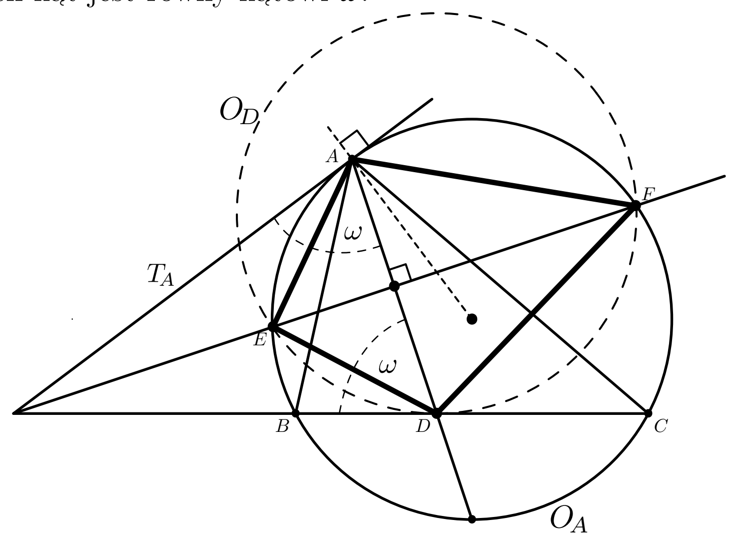
$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 12|}{5},$$

więc też jest liczbą wymierną (jako iloraz liczb wymiernych). $\square$

2. *W trójkącie ostrokątnym* ABC *dwusieczna kąta* BAC *przecina bok* BC *w punkcie* D. *Symetralna odcinka* AD *przecina okrąg opisany na trójkącie* ABC *w punktach* E *i* F. *Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie* DEF *jest styczny do prostej* BC.

Rozwiązanie

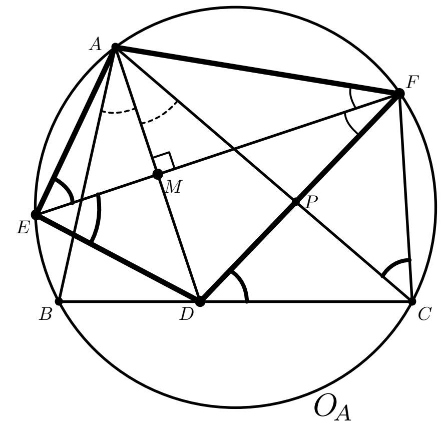
Symetria S_{EF} względem prostej EF przekształca trójkąt AEF na trójkąt DEF, więc okrąg O_A opisany na trójkącie AEF jest przekształcany przez nią na okrąg O_D opisany na trójkącie DEF. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle ACB$. Niech T_A oznacza styczną do okręgu O_A w punkcie A. Kąt ostry między styczną T_A a cięciwą AB jest równy kątowi $\sphericalangle ACB$, zatem ostry ewentualnie prosty kąt ω utworzony przez styczną T_A i półprostą $AD^{\rightarrow}$ jest równy $\sphericalangle ACB + \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$. Zachodzi też równość $\sphericalangle BDA = \sphericalangle DCA + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BCA + \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$ (bo kąt zewnętrzny trójkąta jest sumą dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych), więc ten kąt jest równy kątowi ω.



Ponieważ symetria S_{EF} przekształca odcinek AD na odcinek DA, więc przekształca styczną T_A na prostą przechodzącą przez punkt D tworzącą z odcinkiem DA kąt ω, czyli na prostą BC. Wobec tego prosta BC jest styczna do okręgu O_D — obrazu O_A w symetrii S_{EF}. Otrzymaliśmy tezę. $\square$

Rozwiązanie drugie

Nie tracąc ogólności rozważań załóżmy, że $AB \leqslant AC$ czyli, że $\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle BCA$. Dalej $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$ — kąt zewnętrzny trójkąta to suma dwóch wewnętrznych do niego nieprzyległych. Wobec tego, że naprzeciwko większego kąta w trójkącie leży dłuższy, bok mamy $AB > BD$. Niech M będzie środkiem dwusiecznej AD. Skoro $AB > BD$, to kąt $\sphericalangle BMD$ jest ostry. Stąd i z tego, że prosta EF jest symetralną odcinka AD wynika, że punkty B i C leżą po jednej stronie prostej EF. Możemy więc przyjąć, że punkt E leży na tym z łuków wyznaczonych przez punkty A i B, który nie zawiera punktu C, a punkt F — na tym łuku wyznaczonym przez punkty A i C, który nie zawiera punktu B.



Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami: $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$ oraz $\gamma = \sphericalangle BCA$. Czworokąt $AEDF$ jest symetryczny względem prostej EF. Niech $\varphi = \sphericalangle AFE = \sphericalangle EFD$ i niech P będzie punktem wspólnym odcinków AC i DF. Zachodzą równości

$$\sphericalangle CAF = \sphericalangle DAF - \sphericalangle DAC = 90^\circ - \varphi - \tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{\beta+\gamma}{2} - \varphi\,.$$

Ponieważ $\sphericalangle PDC + \sphericalangle DCP = \sphericalangle PFA + \sphericalangle FAP$, więc

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle PFA + \sphericalangle FAP - \sphericalangle DCP = 2\varphi + \tfrac{\beta+\gamma}{2} - \varphi - \gamma = \varphi + \tfrac{\beta-\gamma}{2}.$$

Mamy $\sphericalangle FAC + \sphericalangle ACF + \sphericalangle AFC = 180^\circ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle AFC$, więc

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle ABC - \sphericalangle FAC = \beta - \left(\tfrac{\beta+\gamma}{2} - \varphi\right) = \varphi + \tfrac{\beta-\gamma}{2}.$$

W takim razie

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle AEF = \sphericalangle ACF = \varphi + \tfrac{\beta-\gamma}{2} = \sphericalangle PDC = \sphericalangle FDC.$$

Niech O_D będzie okręgiem opisanym na trójkącie EFD. Ponieważ kąt wpisany w okrąg O_D oparty na łuku DF (niezawierającym punktu E) jest równy kątowi między styczną do tego okręgu w punkcie D i cięciwą DF, więc prosta BC jest styczna do O_D. Zakończyliśmy dowód. □

3. *Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja f, która każdej liczbie całkowitej k przypisuje nieujemną liczbę całkowitą $f(k)$ i spełnia następujące dwa warunki:*

- $f(0) > 0$,
- *dla każdej liczby całkowitej k najmniejsza spośród liczb postaci $f(k-l) + f(l)$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$, jest równa $f(k)$.*

Rozwiązanie

Udowodnimy, że takiej funkcji nie ma. Przypuśćmy, że f jest funkcją o podanych własnościach. Niech m będzie jej najmniejszą wartością (istnieje, bo wartościami funkcji f są nieujemne liczby całkowite) i niech a będzie liczbą o najmniejszej wartości bezwzględnej, dla której zachodzi równość $f(a) = m$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \geqslant 0$. W myśl założenia, $f(a)$ to najmniejsza z liczb postaci $f(l) + f(a-l)$, więc istnieje $b \in \mathbb{Z}$, dla którego zachodzi wzór

(1) $$m = f(a) = f(b) + f(a-b) \geqslant m + m.$$

Ponieważ $m \geqslant 0$ i $m \geqslant 2m$, więc $m = 0$, zatem $f(a) = 0$, przy czym $a \geqslant 1$ (bo $f(0) > 0$).

Z określenia liczby a wynika, że

(2) $$f(k) > 0 \quad \text{dla} \quad |k| < a.$$

Z wzorów (1) i $m = 0$ otrzymujemy równości $f(b) = 0 = f(a-b)$. Zauważmy, że liczby b i $a-b$ albo obie leżą w przedziale $(0, a)$, albo obie znajdują się poza nim. Własność (2) wyklucza pierwszą z tych możliwości. Funkcja f ma więc ujemne miejsce zerowe. Niech $c < 0$ będzie jej miejscem zerowym, położonym najbliżej zera. Wobec (2) mamy $f(k) > 0$, gdy $c < k < a$. Z nierówności $c < a + c < a$ wynika, że $f(a+c) > 0$. Ale przecież

$$f(a+c) \leqslant f(a+c-a) + f(a) = f(c) + f(a) = 0$$

(przyjęliśmy $k = a + c$ oraz $l = a$ w warunku z treści zadania). Otrzymana sprzeczność kończy dowód nieistnienia funkcji o podanych własnościach. □

LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. *Dana jest liczba całkowita dodatnia k. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której zbiory $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ i $B = \{1^2 + n, 2^2 + n, 3^2 + n, \ldots\}$ mają dokładnie k wspólnych elementów.*

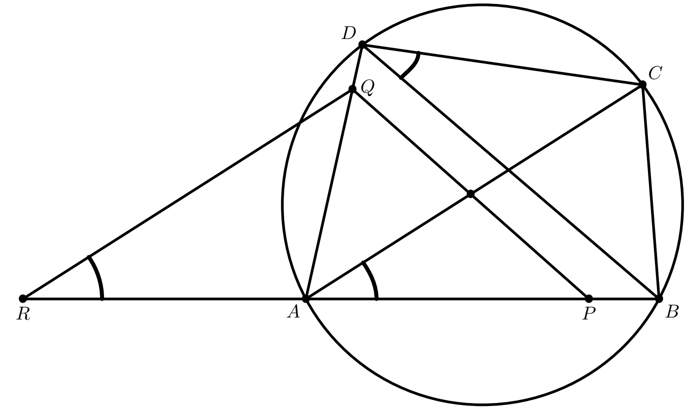
Rozwiązanie

Udowodnimy, że np. liczba $n = 3^{2k-1}$ spełnia warunki zadania. W tym celu należy sprawdzić, że istnieje dokładnie k par liczb całkowitych dodatnich (a, b), dla których zachodzi wzór $a^2 = b^2 + 3^{2k-1}$. Równość $3^{2k-1} = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ przedstawia rozkład liczby 3^{2k-1} na iloczyn dwóch czynników, z których pierwszy jest mniejszy od drugiego. Jest ona więc równoważna temu, że dla pewnego $l \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ mamy $a - b = 3^l$ oraz $a + b = 3^{2k-1-l}$, czyli $a = \frac{1}{2}\left(3^{2k-1-l} + 3^l\right)$ oraz $b = \frac{1}{2}\left(3^{2k-1-l} - 3^l\right)$. Wobec tego par (a, b) o powyższych własnościach jest dokładnie k. $\square$

5. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $AP = CD$, $AQ = BC$. Wykazać, że środek odcinka PQ leży na prostej AC.*

Rozwiązanie

Niech R będzie punktem symetrycznym do punktu P względem wierzchołka A. Trójkąty QAR i BCD są przystające, bo $QA = BC$, $AR = CD$ i $\sphericalangle BCD = 180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle QAR$ — suma przeciwległych kątów czworokąta wpisanego w okrąg to 180°. Stąd otrzymujemy równości kątów: $\sphericalangle ARQ = \sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB$ (kąty wpisane oparte na jednym łuku są równe). Wynika stąd, że $RQ \parallel AC$.



Prosta AC połowi odcinek PR, więc na mocy twierdzenia Talesa również odcinek PQ. $\square$

6. *W przestrzeni danych jest n zielonych punktów, przy czym $n \geqslant 4$ i żadne cztery zielone punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre odcinki łączące zielone punkty pomalowano na czerwono. Liczba czerwonych odcinków jest parzysta. Każde dwa różne zielone punkty łączy pewna łamana złożona z czerwonych odcinków.*

Udowodnić, że czerwone odcinki da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jedynym punktem wspólnym różnych czerwonych odcinków może być wspólny koniec (żadne cztery zielone punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie). *Cyklem* nazywać będziemy taki ciąg $I_1, I_2, \ldots, I_k$ parami różnych czerwonych odcinków, że dla $j = 1, 2, \ldots, k$ odcinek I_j łączy punktyA_j i A_{j+1}, przy czym $A_{k+1} = A_1$.

Opiszemy operację zmniejszającą liczbę cykli utworzonych z czerwonych odcinków i zwiększającą o jeden liczbę zielonych punktów.

Wybieramy dowolny cykl $I_1, I_2, \ldots, I_k$ (jeśli istnieje). Usuwamy odcinek I_1 i dodajemy zielony punkt tak, aby nie leżał na żadnej z płaszczyzn wyznaczonych przez trójki pozostałych punktów. Następnie nowy zielony punkt łączymy z A_1 czerwonym odcinkiem. Zauważmy, że w ten sposób zmniejszyliśmy liczbę cykli i nie zmieniliśmy liczby czerwonych odcinków. Poza tym każde dwa różne, zielone punkty są wciąż połączone czerwoną łamaną (czyli złożoną z czerwonych odcinków). Co więcej, jeśli nowe odcinki podzielilišmy na pary tak, aby odcinki z pary miały wspólny koniec, to odpowiednie „stare” odcinki też miały wspólny koniec.

Powtarzamy tę operację, dopóki nie usuniemy wszystkich cykli. Otrzymany zbiór punktów jest rzecz jasna skończony.

Niech $PB_1B_2 \ldots B_{k-1}B_kA$ będzie łamaną złożoną z największej możliwej liczby czerwonych odcinków (ponieważ zlikwidowaliśmy wszystkie cykle, więc dwa różne punkty łączy dokładnie jedna czerwona łamana). Oczywiście, taka łamana musi się składać z co najmniej dwóch odcinków, gdyż istnieją co najmniej dwa czerwone odcinki.

Jeśli istnieje taki zielony punkt $C \neq B_{k-1}$, że odcinek B_kC jest czerwony, to łączymy odcinki AB_k i B_kC w parę i usuwamy oba ze zbioru czerwonych odcinków (a punkty A i C ze zbioru zielonych punktów). Nowy, mniejszy zbiór spełnia założenia nałożone na zbiór wyjściowy, gdyż jedynym czerwonym odcinkiem o końcu w A był AB_k, a o końcu w C — odcinek CB_k. W przeciwnym razie istniałaby czerwona łamana o początku w P złożona z większej liczby odcinków niż $PB_1B_2 \ldots B_{k-1}B_kA$.

Jeśli z kolei jedynym odcinkiem o końcu w B_k jest B_kA, to łączymy w parę odcinki $B_{k-1}B_k$ oraz B_kA i usuwamy je (oraz punkty B_k i A), otrzymując w ten sposób mniej liczny zbiór czerwonych odcinków spełniający założenia nałożone na wstępie — nie rozerwaliśmy żadnej czerwonej łamanej, jedynie skróciliśmy jedną o dwa odcinki.

Powtarzamy konstrukcję opisaną w dwóch poprzednich akapitach, dopóki nie połączymy wszystkich czerwonych odcinków w pary (ostatecznie zmniejszymy zbiór zielonych punktów do zbioru jednoelementowego lub pustego). □