LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia pierwszego

pierwsza seria: 1 września — 30 września

Zadanie 1.

Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym kroku zmazujemy liczbę n napisaną na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli liczba n jest parzysta, to piszemy na tablicy liczbę $\frac{n}{2}$. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to wybieramy jedną z liczb $3n+1$, $3n-1$ i piszemy ją na tablicy.

Czy — niezależnie od tego, jaką liczbę napisano na tablicy na początku — możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

Rozwiązanie

Oczywiście $\frac{n}{2} < n$ dla każdej liczby parzystej n.

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $n = 4k+1$ lub $n = 4k+3$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 0$.

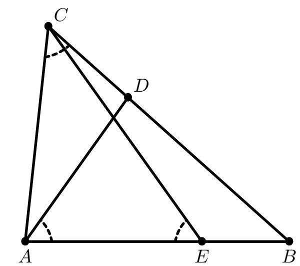
W pierwszym wypadku po zmazaniu n na tablicy piszemy $3n+1 = 12k+4$, więc w następnych krokach pojawiają się liczby $\frac{3n+1}{2} = 6k+2$ i $\frac{3n+1}{4} = 3k+1 < 4k+1 = n$ dla $k > 0$, czyli $n > 1$.

W drugim wypadku na tablicy piszemy liczbę $3n-1 = 12k+8$, co zmusza nas do zastąpienia jej kolejno przez $6k+4$ i przez $3k+2 < 4k+3 = n$ dla każdej liczby $k \geqslant 0$.

Wykazaliśmy, że jeśli na tablicy pojawiła się na początku liczba $n > 1$, to najdalej po trzech krokach możemy napisać liczbę od niej mniejszą (niezależnie od parzystości n). Oznacza to, że po skończonej liczbie kroków możemy uzyskać liczbę 1. $\square$

Zadanie 2. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, E — na boku AB, przy czym $BD = AC$, $AD = AE$ i $AB^2 = AC \cdot BC$. Dowieść, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CEA$.

Rozwiązanie



Ponieważ $AB^2 = AC \cdot BC = BD \cdot BC$, czyli $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, więc na mocy cechy *bok – kąt – bok* trójkąty ABC i DBA są podobne, w szczególności $\frac{AC}{BA} = \frac{DA}{BD}$. Wobec tego $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB}$, więc na mocy cechy *bok – kąt – bok* trójkąty EAC i CAB są podobne. Wobec tego $\sphericalangle CEA = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$ — ostatnia równość wynika z podobieństwa trójkątów ABC i DBA. $\square$

Zadanie 3. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą takimi funkcjami kwadratowymi, że nierówność $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x. Δ_f jest wyróżnikiem funkcji f, a Δ_g — wyróżnikiem funkcji g. Udowodnić, że $|\Delta_f| \geqslant |\Delta_g|$.

Rozwiązanie

Niech $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Pomnożenie którejkolwiek z tych funkcji przez -1 nie zmienia ani jej modułu, ani wyróżnika. Nie tracąc ogólności przyjmujemy więc, że $A > 0$, $a > 0$. Rozważymy trzy przypadki.

1°. $\Delta_f > 0$. Wówczas trójmian f ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2. Są to jednocześnie pierwiastki trójmianu g (bo $|f| \geq |g|$). Zatem $f(x) = A(x-x_1)(x-x_2)$, $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, czyli $g(x) = t \cdot f(x)$, gdzie $t = \frac{a}{A} > 0$. Oczywiście $t \leqslant 1$ (bo $|g| \leqslant |f|$). Równość $g = tf$ oznacza, że $a = tA$, $b = tB$, $c = tC$; stąd $|\Delta_g| = |t^2 \Delta_f| \leqslant |\Delta_f|$.

2°. $\Delta_f \leqslant 0 < \Delta_g$. W tym przypadku trójmian f przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Założenie przybiera postać $f(x) \geq |g(x)|$, zatem obie funkcje $f+g$ oraz $f-g$ przyjmują wyłącznie wartości nieujemne. Pierwsza z nich jest więc trójmianem kwadratowym o wyróżniku $\Delta_{f+g} \leqslant 0$. Druga też jest trójmianem kwadratowym o wyróżniku $\Delta_{f-g} \leqslant 0$ lub jest stałą nieujemną. Otrzymujemy nierówności

$$(B+b)^2 - 4(A+a)(C+c) \leqslant 0, \quad (B-b)^2 - 4(A-a)(C-c) \leqslant 0;$$

ta druga zachodzi także wtedy, gdy $f-g$ jest stałą (czyli $A=a$, $B=b$). Przepisujemy te nierówności w postaci

$$\Delta_f+\Delta_g+(2Bb-4Ac-4Ca)\leqslant 0, \quad \Delta_f+\Delta_g-(2Bb-4Ac-4Ca)\leqslant 0.$$

Uzyskujemy wniosek, że

$$\Delta_f+\Delta_g\leqslant 2Bb-4Ac-4Ca\leqslant -\Delta_f-\Delta_g\,,$$

równoważny nierówności

$$0\leqslant |2Bb-4Ac-4Ca|\leqslant -\Delta_f-\Delta_g=|\Delta_f|-|\Delta_g|.$$

3°. $\Delta_f\leqslant 0$, $\Delta_g\leqslant 0$. Teraz oba te trójmiany (f i g) przyjmują wyłącznie wartości nieujemne, a założenie ma postać $f(x)\geq g(x)$. Wartości minimalne tych trójmianów to $f(-\frac{B}{2A})=\frac{|\Delta_f|}{4A}$, $g(-\frac{b}{2a})=\frac{|\Delta_g|}{4a}$ (wierzchołki parabol). Dla każdego x mamy $f(x)\geq g(x)\geq g(-\frac{b}{2a})$. Biorąc $x=-\frac{B}{2A}$ otrzymujemy nierówność $\frac{|\Delta_f|}{4A}\geq\frac{|\Delta_g|}{4a}$, czyli $|\Delta_f|\geq\frac{A}{a}|\Delta_g|\geq|\Delta_g|$.

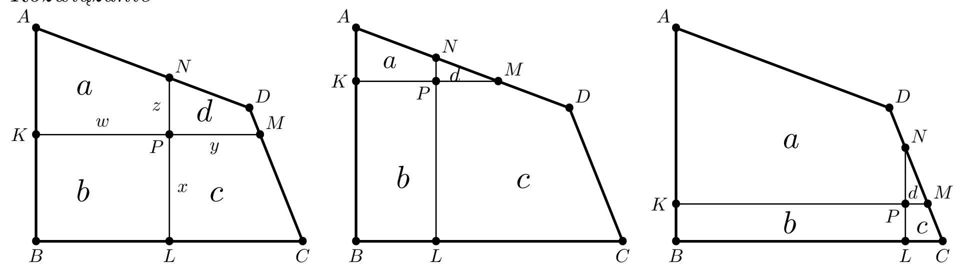
Rozpatrzone trzy przypadki obejmują wszystkie możliwości. W każdym z nich uzyskaliśmy żądaną nierówność $|\Delta_f|\geq|\Delta_g|$.

Zadanie 4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Kąt przy wierzchołku B jest prosty, a kąty przy wierzchołkach A i C — ostre. Przez punkt P, leżący wewnątrz czworokąta $ABCD$ poprowadzono proste równoległe do boków AB i CB. Dzielą one czworokąt $ABCD$ na cztery wielokąty.

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest A ma pole a.
Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest B ma pole b.
Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest C ma pole c.
Czwarty wielokąt ma pole d.

Udowodnić, że $ac\geqslant bd$.

Rozwiązanie



Niech K będzie rzutem prostokątnym punktu P na bok AB, L — rzutem prostokątnym punktu P na bok BC. K i L są punktami wewnętrznymi odpowiednich boków, bo kąt ABC jest prosty zaś kąty DAB i BCD są ostre. Niech M i N będą punktami przecięcia prostych KP i LP z obwodem czworokąta znajdującymi się poza odcinkami AB i BC. Oznaczmy długości kolejnych odcinków PK, PL, PM i PN literami w, x, y, z. Pole czworokąta $KBLP$ równe jest b, a ponieważ jest to prostokąt, którego boki mają długości w i x, więc $b=wx$. Wielokąt o polu a (czworokąt lub pięciokąt) zawiera prostokąt o bokach długości w i z, więc $a>wz$. Analogicznie $c>xy$, Natomiast czwarty wielokąt, ten o polu d, jest albo trójkątem albo czworokątem. W obu wypadkach jest zawarty w prostokącie o bokach długości y i z, zatem $d<yz$. Mamy więc $ac>wzxy=wxyz>bd$, a to chcieliśmy udowodnić. □

Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b równanie

$$(x^2-y^2-a)(x^2-y^2-b)(x^2-y^2-ab)=0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

Rozwiązanie

Jeśli liczba a jest nieparzysta, to przyjmując $x=\frac{a+1}{2}$, $y=\frac{a-1}{2}$ otrzymujemy $x^2-y^2-a=0$. Podobnie, gdy b jest liczbą nieparzystą, para liczb całkowitych $x=\frac{b+1}{2}$, $y=\frac{b-1}{2}$ spełnia równanie $x^2-y^2-b=0$. Jeśli obie liczby a i b są parzyste, to para liczb całkowitych $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$ spełnia równanie $x^2-y^2-ab=0$. W każdym z trzech przypadków wskazaliśmy parę liczb całkowitych spełniającą równanie $(x^2-y^2-a)(x^2-y^2-b)(x^2-y^2-ab)=0$. $\square$

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie takie pary P, Q wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą obie równości:

$$P(x^2+1)=Q(x)^2+2x \quad \text{oraz} \quad Q(x^2+1)=P(x)^2.$$

Rozwiązanie

Mamy $2x+Q(x)^2=P(x^2+1)=P((-x)^2+1)=Q(-x)^2-2x$, zatem $4x=Q(-x)^2-Q(x)^2=\big(Q(-x)-Q(x)\big)\big(Q(-x)+Q(x)\big)$. Wynika stąd, że jeden z wielomianów $Q(-x)-Q(x)$, $Q(-x)+Q(x)$ jest stopnia 0, a drugi — stopnia 1. W wielomianie $Q(-x)+Q(x)$ występują tylko parzyste potęgi zmiennej x, więc jego stopień jest liczbą parzystą. Ponieważ ten stopień nie jest większy od 1, więc jest równy 0, czyli wielomian $Q(-x)+Q(x)$ jest stałą (różną od 0). Wobec tego stopień wielomianu $Q(-x)-Q(x)$ jest równy 1. Oczywiście $Q(-0)-Q(0)=0$. Istnieją więc takie liczby $a\neq 0$ i $c\neq 0$, że $Q(-x)+Q(x)=2c$, $Q(-x)-Q(x)=2ax$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Stąd wynika, że $Q(x)=-ax+c$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

Z równości $Q(x^2+1)=P(x)^2$ wynika, że stopień wielomianu P jest równy 1, więc istnieją takie liczby $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, że $P(x)=\alpha x+\beta$. W konsekwencji

$$-a(x^2+1)+c=P(x)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2,$$

więc $2\alpha\beta=0$, a ponieważ $\alpha\neq 0$, zatem $\beta=0$ i wobec tego $-a=\alpha^2$ i $c-a=\beta^2=0$. Oznacza to, że $a=c=-\alpha^2$, czyli $P(x)=\alpha x$ oraz $Q(x)=\alpha^2(x-1)$. Z równości $P(x^2+1)=Q(x)^2+2x$ wnioskujemy, że $\alpha(x^2+1)=\alpha^4(x-1)^2+2x$. Dla $x=1$ mamy $2\alpha=2$, więc $\alpha=1$. Udowodniliśmy, że istnieje co najwyżej jedna para takich wielomianów: $P(x)=x$ i $Q(x)=x-1$. Bez trudu sprawdzamy, że te wielomiany spełniają równania z treści zadania. Istnieje zatem dokładnie jedna para wielomianów spełniających oba warunki. $\square$

Zadanie 7. Dwuosobowa gra polega na stawianiu pionków na wierzchołkach n–kąta foremnego (zakładamy, że $n\geqslant 3$). Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz stawia jeden ze swych, dotychczas nieużytych pionków na dowolnym niezajętym wierzchołku, który nie sąsiaduje z wierzchołkiem zajętym przez pionek przeciwnika. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, w zależności od n, czy strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik?

Rozwiązanie

Załóżmy, że pierwszym graczem jest Ewa, a drugim — Jan. Wykażemy, że jeśli liczba n jest parzysta, to strategię wygrywającą ma Jan, a jeśli liczba n jest nieparzysta — Ewa. Zaczniemy od pierwszego przypadku. Jan może zawsze postawić następny pionek na polu symetrycznym względem środka wielokąta do pola, na którym postawiła pionek Ewa. To gwarantuje mu wygraną w oczywisty sposób, niezależnie od poczynań swej przeciwniczki.

Teraz załóżmy, że n jest nieparzyste. Ewa stawia gdzieś swój pionek, co powoduje, ze Jan nie może korzystać z trzech pól. Wyobraźmy sobie, że gracze przenoszą się na wielokąt, który ma $n-1$ wierzchołków. Są tam dwa pola sąsiednie zakazane dla Jana, ale nie dla Ewy. Teraz Jan stawia gdzieś swój pionek, a Ewa stawia na polu symetrycznym względem środka $(n-1)$–kąta. Może zawsze to uczynić, więc teraz ona wygra (jeśli tylko będzie kontynuować swe postępowanie). $\square$

Zadanie 8. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Rozwiązanie

Oznaczmy, jak zwykle, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$. Niech S będzie środkiem odcinka AD. W trójkącie ABD zachodzą związki $\sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}$ oraz

$$\sphericalangle BDA = 180^\circ - (\beta + \tfrac{\alpha}{2}) = \alpha + \beta + \gamma - (\beta + \tfrac{\alpha}{2}) = \tfrac{\alpha}{2} + \gamma,$$

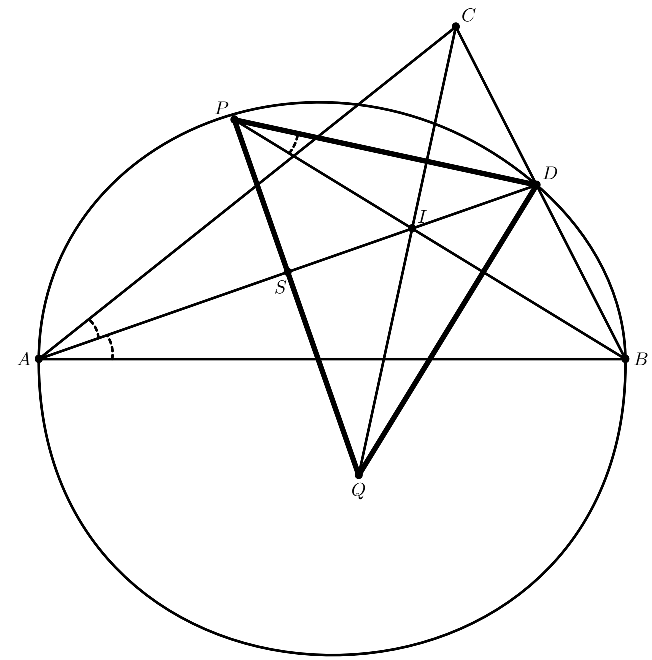
z których wynika, że $DB < AB$ (naprzeciwko mniejszego kąta leży krótszy bok). W tymże trójkącie punkt I, jako spodek dwusiecznej BI, dzieli bok DA w stosunku $DI : IA = DB : AB < 1$. Punkt ten leży więc między punktami D i S. Wobec tego leży też między punktami B i P. Zatem kąt PIC jest kątem zewnętrznym trójkąta CIB i zachodzi równość $\sphericalangle PIC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Rozważmy okrąg opisany na trójkącie ABD. Dwusieczna $BI^{\rightarrow}$ przecina go w środku tego łuku o końcach A i D, który nie zawiera punktu B. Również symetralna cięciwy AD przechodzi przez ten środek. Jedynym punktem wspólnym owej symetralnej i prostej BI jest punkt P (proste te nie pokrywają się, skoro pierwsza z nich nie przechodzi przez punkt I). Punkt P leży więc na rozważanym okręgu po tej samej stronie prostej BD co punkt A. Stąd otrzymujemy $\sphericalangle DPB = \sphericalangle DAB$, czyli $\sphericalangle DPI = \frac{\alpha}{2}$.

Łącząc uzyskane związki, otrzymujemy równość

$$\sphericalangle DPI + \sphericalangle PIC = \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \tfrac{\gamma}{2} = 90^\circ.$$

Wynika z niej, że prosta IC (czyli prosta QI) jest prostopadła do prostej PD. Zawiera więc wysokość trójkąta PQD. Inną wysokością tego trójkąta jest odcinek DS, przechodzący przez punkt I. Oznacza to, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I. $\square$



Zadanie 9. Dowieść, że liczba $\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie

Niech $x=\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=$ $=\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$, zatem

$$x\left(\sqrt{2}+1\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

Wobec tego $x^2\left(3+2\sqrt{2}\right)=x^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=8-2\sqrt{15}$. Mamy więc $2x^2\sqrt{2}=8-3x^2-2\sqrt{15}$. Po podniesieniu ostatniej równości stronami do kwadratu otrzymujemy

$$8x^4=(8-3x^2)^2-4(8-3x^2)\sqrt{15}+60.$$

Jeżeli x jest liczbą wymierną, to liczba $(8-3x^2)^2+60-8x^4$ jest wymierna. Jeśli $8-3x^2\neq 0$, to $\sqrt{15}=\frac{(8-3x^2)^2+60-8x^4}{4(8-3x^2)}$, co przeczy niewymierności liczby $\sqrt{15}$. Wynika stąd, że $8-3x^2=0$. Niech $x=\frac{p}{q}$, przy czym liczby całkowite p i q są względnie pierwsze. Otrzymujemy wzór $8q^2=3p^2$. Liczba q jest więc podzielna przez 3, czyli $q=3r$ dla pewnej liczby całkowitej r. Wobec tego $8\cdot 3\cdot r^2=p^2$, więc liczba p dzieli się przez 3, co jednak przeczy nieskracalności ułamka $\frac{p}{q}$. Okazało się, że liczba x nie może być wymierna, a to należało udowodnić. □

Zadanie 10. Rozwiązać układ n równań z niewiadomymi $x_1,x_2,\ldots,x_n$, gdzie $n\geqslant 2$:

$$\begin{cases} 2x_1^3+4=x_1^2(x_2+3) \\ 2x_2^3+4=x_2^2(x_3+3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_{n-1}^3+4=x_{n-1}^2(x_n+3) \\ 2x_n^3+4=x_n^2(x_1+3) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Z układu równań wynika od razu, że $x_i\neq 0$ dla $i=1,2,\ldots,n$. Można więc przepisać te równania w postaci

$$\begin{cases} 2x_1+\frac{4}{x_1^2}-3=x_2 \\ 2x_2+\frac{4}{x_2^2}-3=x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_{n-1}+\frac{4}{x_{n-1}^2}-3=x_n \\ 2x_n+\frac{4}{x_n^2}-3=x_1 \end{cases}$$

Mamy teraz

$$2x+\frac{4}{x^2}-3-x=\frac{x^3+4-3x^2}{x^2}=\frac{(x+1)(x^2-4x+4)}{x^2}=\frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2}.$$

Z tej równości wynika, że $x=2x+\frac{4}{x^2}-3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=-1$ lub $x=2$. Znaleźliśmy więc dwa rozwiązania układu równań: $x_1=x_2=\ldots=x_n=-1$ oraz $x_1=x_2=\ldots=x_n=2$. Udowodnimy, że innych rozwiązań nie ma.

Jeśli $x<-1$, to $2x+\frac{4}{x^2}-3<x$, zatem jeżeli $x_1<-1$, to

$x_2=2x_1+\frac{4}{x_1^2}-3<x_1$,

$x_3=2x_2+\frac{4}{x_2^2}-3<x_2<x_1<-1$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_n=2x_{n-1}+\frac{4}{x_{n-1}^2}-3<x_{n-1}<\ldots<x_3<x_2<x_1<-1$,

$x_1=2x_n+\frac{4}{x_n^2}-3<x_n<x_{n-1}<\ldots<x_3<x_2<x_1<-1$,

zatem $x_1<x_1$, co jest niemożliwe. Nie ma więc rozwiązań, w których $x_1<-1$. Takie samo rozumowanie w wypadku $-1<x_1\neq 2$ daje wynik $x_1<x_2\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant x_1$, co znów nie jest możliwe. Nieostre nierówności pojawiły się, bo może zdarzyć się, że $x_i=2$ dla pewnego $i\in\{2,\ldots n\}$ (gdy $x_{i-1}=\frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{17}\right)$) i wtedy otrzymujemy wzory: $2=x_{i+1}=x_{i+2}=\ldots=x_n=x_1$.

Udowodniliśmy, że jedynymi rozwiązaniami układu równań są dwa wskazane wyżej. □

Zadanie 11. Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny (poniżej, dla ilustracji, fragment tej tabeli). Udowodnić, że jeśli na przecięciu m–tego wiersza z n–tą kolumną znajduje się liczba r, to na przecięciu m–tego wiersza z r–tą kolumną znajduje się liczba n.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & \dots \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & \dots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & \dots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Rozwiązanie

Pokażemy najpierw nieco większy fragment tabeli.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & \dots \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & \dots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & \dots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & \dots \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & \dots \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Będziemy używali zapisu liczb w dwójkowym systemie pozycyjnym. Każda dodatnia liczba całkowita n ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $c_0 + 2c_1 + \ldots + 2^t c_t$, gdzie $c_i = 0$ lub 1 (dla $i = 0, \ldots, t$), przy czym $c_t = 1$; zapisem dwójkowym liczby n jest wtedy ciąg $t+1$ cyfr $c_t c_{t-1} \ldots c_1 c_0$. Działa ponadto umowa, że wiodącą jedynkę ($c_t = 1$) poprzedzamy zerami tworząc nieskończony ciąg (podobnie, jak w zapisie dziesiętnym, gdzie np. liczbę 77 można — w razie potrzeby — zapisać jako $\ldots 00077$; tę samą liczbę zapisujemmy w systemie dwójkowym jako 1001101 ($77 = 1{+}0{\cdot}2{+}1{\cdot}4{+}1{\cdot}8{+}0{\cdot}16{+}0{\cdot}32{+}1{\cdot}64$), a w wyniku wydłużenia ciągu cyfr w lewo jako $\ldots 001001101$). Liczbę 0 zapisujemy jako nieskończony ciąg zer. Mówimy, że liczba o przedstawieniu dwójkowym $\ldots 000c_t \ldots c_1 c_0$ ma na i-tej pozycji zero (jedynkę), gdy $c_i = 0$ (gdy $c_i = 1$).

Niech x, y będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Patrzymy na ich przedstawienia dwójkowe (nieskończone). Symbolem $x \diamondsuit y$ będziemy oznaczać liczbę określoną następująco:

> gdy x oraz y mają na i-tej pozycji jednakowe cyfry, liczba $x \diamondsuit y$ ma na i-tej pozycji zero;
>
> gdy x oraz y mają na i-tej pozycji różne cyfry, liczba $x \diamondsuit y$ ma na i-tej pozycji jedynkę.[1]

(Przykład: dla $x = \ldots 0\,001\,001\,101$, $y = \ldots 0\,000\,011\,100$ mamy $x \diamondsuit y = \ldots 0\,001\,010\,001$). Jasne jest, że zdefiniowane tak działanie przemienne ($x \diamondsuit y = y \diamondsuit x$) i łączne ($(x \diamondsuit y) \diamondsuit z = x \diamondsuit (y \diamondsuit z)$). Jest też jasne, że $x \diamondsuit 0 = x$ oraz $x \diamondsuit x = 0$ dla każdej liczby x. Ma ono ponadto ważną własność:

(1) jeżeli $z = x \diamondsuit y$, to $x = y \diamondsuit z$ oraz $y = x \diamondsuit z$.

Wynika to od razu z wymienionych wcześniej własności działania $\diamondsuit$:

$$y \diamondsuit z = z \diamondsuit y = (x \diamondsuit y) \diamondsuit y = x \diamondsuit (y \diamondsuit y) = x \diamondsuit 0 = x \text{ oraz}$$
$$x \diamondsuit z = x \diamondsuit (x \diamondsuit y) = (x \diamondsuit x) \diamondsuit y = 0 \diamondsuit y = y.$$

W tabeli, rozważanej w zadaniu, pole leżące na przecięciu m-tego wiersza i n-tej kolumny będziemy oznaczać $\langle m, n \rangle$. Udowodnimy, że dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 0$:

(2) w polu $\langle m, n \rangle$ znajduje się liczba $m \diamondsuit n$.

(jest to więc „tabliczka wartości działania $\diamondsuit$”, podobna do „tabliczki mnożenia”, choć znacznie większa). Teza zadania wyniknie stąd natychmiast: gdy w polu $\langle m, n \rangle$ stoi liczba $r = m \diamondsuit n$, to w myśl reguły (1), $n = m \diamondsuit r$, czyli w polu $\langle m, r \rangle$ stoi liczba n.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem sumy współrzędnych pól. W polu $\langle 0, 0 \rangle$ znajduje się najmniejsza dopuszczalna liczba, czyli 0 ($= 0 \diamondsuit 0$). Ustalmy wartość sumy $s \geqslant 1$ i załóżmy, że w każdym

[1] i–ta cyfra liczby $x \diamondsuit y$ jest więc resztą z dzielenia przez 2 sumy i–tych cyfr liczb x, y. Traktując i–te cyfry liczb x, y jako wartości logiczne zdań możemy powiedzieć, że i–tą cyfrą liczby $x \diamondsuit y$ jest alternatywa wykluczająca i–tych cyfr liczb x, y.

polu $\langle k,l\rangle$ o sumie $k+l<s$ znajduje się liczba $k\diamondsuit l$. Weźmy dowolne pole $\langle m,n\rangle$ o sumie $m+n=s$. Należy udowodnić, że liczba r, określona jako $r=m\diamondsuit n$, jest różna od wszystkich liczb postaci $k\diamondsuit n$ (gdzie $k<m$) oraz od wszystkich liczb $m\diamondsuit l$ (gdzie $l<n$), i że jest najmniejszą liczbą o tej własności.

Pierwsza część stwierdzenia jest oczywista: gdyby zachodziła równość $k\diamondsuit n=m\diamondsuit n$, to zgodnie z regułą (1) otrzymalibyśmy równość $k=(k\diamondsuit n)\diamondsuit n=(m\diamondsuit n)\diamondsuit n=m$, wbrew $k<m$. Analogicznie wykluczamy możliwość $m\diamondsuit n=m\diamondsuit l$, $l<n$.

Pozostaje uzasadnić, że każda liczba $q<r$ znajduje się na jakimś polu $\langle k,n\rangle$, $k<m$, lub $\langle m,l\rangle$, $l<n$ – czyli, zgodnie z założeniem indukcyjnym – że

(3) $\quad q=k\diamondsuit n$ dla pewnego $k<m$ lub $q=m\diamondsuit l$ dla pewnego $l<n$.

Niech j będzie najwcześniejszą (od lewej strony) pozycją, na której różnią się cyfry przedstawień dwójkowych liczb q i r. Nierówność $q<r$ oznacza, że na tej pozycji liczba q ma zero, a liczba r jedynkę. Skoro $r=m\diamondsuit n$, liczby m, n mają na pozycji j różne cyfry. Przyjmijmy, że m ma jedynkę, a n ma tam zero (nie tracimy ogólności, wobec symetrii ról wierszy i kolumn).

Weźmy liczbę $k=q\diamondsuit n$. Wtedy, zgodnie z (1), $q=k\diamondsuit n$. Aby uzyskać jeden z wymaganych warunków (3), wystarczy wykazać, że $k<m$.

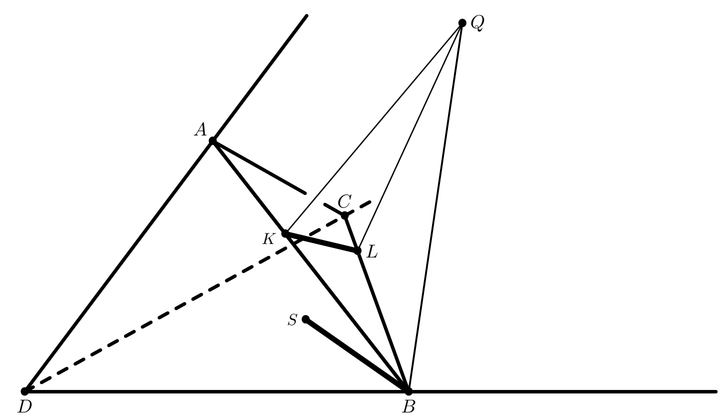
Przypuśćmy, że tak nie jest, więc że $k\geqslant m$. Na pozycji j liczba k ma zero, a liczba m jedynkę, zatem $k\neq m$, więc $k>m$. Oznacza to, że na pewnej pozycji i, na lewo od j, liczba k ma jedynkę, zaś m ma zero. Skoro $k=q\diamondsuit n$ oraz $m=r\diamondsuit n$, cyfry liczb q, n na pozycji i są różne, a cyfry liczb r, n na tej pozycji są jednakowe. To się nie da pogodzić z tym, że zapisy liczb q i r pokrywają się w całym fragmencie na lewo od j, w tym na pozycji i. Sprzeczność dowodzi, że istotnie $k<m$. (Gdybyśmy, chwilę wcześniej, przyjęli przeciwny układ cyfr liczb m, n na pozycji j, uzyskalibyśmy dla liczby $l=m\diamondsuit q$ drugi z warunków (3)).

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną dla dowolnego pola $\langle m,n\rangle$ z sumą $m+n=s$. To dowodzi słuszności stwierdzenia (2) dla wszystkich par liczb $m,n\geqslant 0$ i tym samym kończy rozwiązanie zadania. $\square$

Zadanie 12. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt S jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, zaś Q jest środkiem sfery dopisanej do niego, stycznej do ściany ABC oraz do płaszczyzn pozostałych ścian. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu Q na proste AB i BC. Dowieść, że proste (skośne) KL i BS są prostopadłe.

Rozwiązanie

Płaszczyzny BCQ i BCS są prostopadłe, gdyż dzielą na połowy kąty dwuścienne między półpłaszczyzną o krawędzi BC przechodzącą przez punkt A i płaszczyzną DBC, czyli kąty dopełniające się do $180°$. Prosta QL jest prostopadła do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn, leży w płaszczyźnie BCQ, zatem jest prostopadła do płaszczyzny BCS. Wobec tego jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie BCS, w tym do prostej BS. W taki sam sposób uzasadniamy prostopadłość prostych BS i QK. Proste QL i QK są różne, więc wyznaczają płaszczyznę. Płaszczyzna QKL jest prostopadła do prostej BS, zatem prosta KL, zawarta w płaszczyźnie BKL, też jest prostopadła do BS.



$\square$