



# LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

**Zadanie 1.** Punkty  $E, F, G$  leżą odpowiednio na bokach  $BC, CA, AB$  trójkąta  $ABC$ , przy czym  $2AG = GB$ ,  $2BE = EC$  oraz  $2CF = FA$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżą na odcinkach  $EG$  i  $FG$  odpowiednio, przy czym  $2EP = PG$  oraz  $2GQ = QF$ . Udowodnić, że czworokąt  $AGPQ$  jest równoległobokiem.

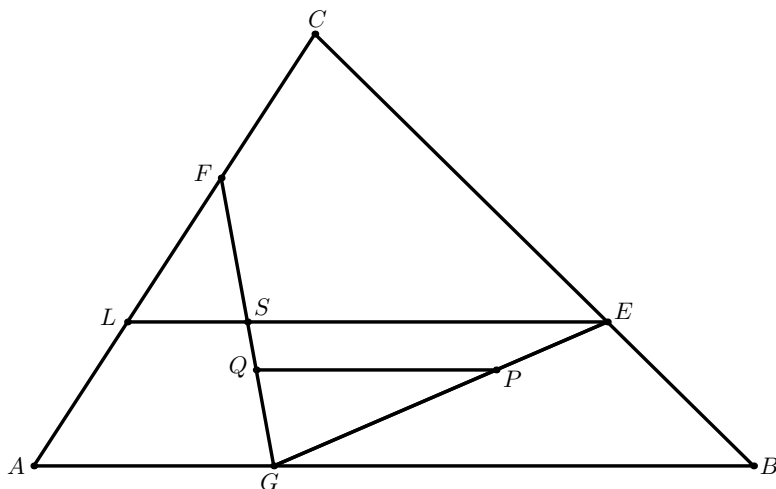
*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez  $L, S$  odpowiednio środki odcinków  $FA, FG$ . Wówczas  $LS \parallel AG$  oraz  $LS = \frac{1}{2}AG$ ; dalej,  $CL = \frac{2}{3}CA$ ,  $CE = \frac{2}{3}CB$ ; stąd  $LE \parallel AB$  oraz  $LE = \frac{2}{3}AB = 2AG$ . Wreszcie  $GQ = \frac{2}{3}GS$ ,  $GP = \frac{2}{3}GE$ ; stąd  $QP \parallel SE$  oraz  $QP = \frac{2}{3}SE$ .

Punkty  $L, S, E$  są współliniowe; tak samo punkty  $A, G, B$ . Uzyskane równoległości dają wniosek, że  $QP \parallel AG$ . Ponadto

$$QP = \frac{2}{3}SE = \frac{2}{3}(LE - LS) = \frac{2}{3}(2AG - \frac{1}{2}AG) = AG.$$

Z tych zależności już wynika, że  $AGPQ$  to równoległobok.



**Zadanie 2.** Dana jest liczba naturalna  $A > 1$ . Niech  $a_1 = A^A$ ,  $a_{n+1} = A^{a_n}$ ,  $b_1 = A^{A+1}$ ,  $b_{n+1} = 2^{b_n}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$  zachodzi nierówność

$$a_n < b_n.$$

### Rozwiązanie

Wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)$  są liczbami naturalnymi większymi od 1. Stąd dla  $n \geq 2$  mamy  $a_n = A^{a_{n-1}} \geq A^2 \geq 2^2$ . Ponieważ także  $a_1 = A^A \geq 2^2$ , widzimy, że  $a_n \geq 4$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Udowodnimy tezę silniejszą niż wymagana w zadaniu. Pokażemy indukcyjnie, że dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  zachodzi nierówność

$$(1) \quad Aa_n \leq b_n.$$

Dla  $n = 1$  jest tu równość. Ustalmy  $n \geq 1$ , przyjmijmy słuszność (1) dla tej liczby  $n$  i starajmy się wykazać tezę indukcyjną  $Aa_{n+1} \leq b_{n+1}$ , zapisując ją równoważnie jako

$$(2) \quad A^{a_n+1} \leq 2^{b_n}.$$

Skoro  $a_n \geq 4$ , to  $a_n + 1 = a_n(1 + a_n^{-1}) \leq a_n(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}a_n$ , skąd  $A^{a_n+1} \leq A^{(5/4)a_n}$ . Jednocześnie (z założenia indukcyjnego)  $2^{b_n} \geq 2^{Aa_n}$ . Udowodnimy nierówność (2), jeśli pokażemy, że  $(A^{5/4})^{a_n} \leq (2^A)^{a_n}$ , czyli że  $A^{5/4} \leq 2^A$ , czyli

$$(3) \quad 2^{-A} \cdot A^{5/4} \leq 1.$$

Jest to prawda dla  $A = 2$ ; dalej zaś, przy zwiększeniu liczby naturalnej  $A$  o jedynkę, wartość wyrażenia po lewej stronie (3) maleje:

$$\frac{2^{-(A+1)} \cdot (A+1)^{5/4}}{2^{-A} \cdot A^{5/4}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{5/4} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{5/4} = \left(\frac{3^5}{2^9}\right)^{1/4} < 1.$$

Stąd słuszność pomocniczej nierówności (3), więc i tezy indukcyjnej (2). Na mocy zasady indukcji, nierówność (1) zachodzi dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Nierówność  $a_n < b_n$  wynika z (1) natychmiast.

**Zadanie 3.** Rozważmy ciąg  $a_n = |n(n+1) - 19|$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dla dowolnego  $n \neq 4$  wykazać, że:  
jeśli dla każdego  $k < n$  liczby  $a_k$  i  $a_n$  są względnie pierwsze, to  $a_n$  jest liczbą pierwszą.

*Rozwiązanie*

Odrzucając symbol wartości bezwzględnej, oznaczmy

$$c_n = n(n+1) - 19;$$

tak więc  $a_n = \pm c_n$ . Sprawdzamy, że  $a_0, a_1, a_2, a_3$  są liczbami pierwszymi, zaś  $a_4 = 1$ .

Weźmy dowolny wyraz  $a_n$  badanego ciągu, będący liczbą złożoną ( $n > 4$ , więc  $a_n = c_n > 1$ ). Należy wykazać, że  $a_n$  ma wspólny dzielnik  $d > 1$  z co najmniej jedną liczbą spośród  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Jest to równoważne stwierdzeniu, że  $c_n$  ma wspólny dzielnik  $d > 1$  z pewną liczbą spośród  $c_0, \dots, c_{n-1}$ .

Niech  $d$  będzie najmniejszym dzielnikiem liczby  $c_n$ , większym od 1. Iloraz  $c_n/d$  też jest jej dzielnikiem, większym od 1; zatem  $d \leq c_n/d$ , czyli  $d^2 \leq c_n = n(n+1) - 19 < (n+1)^2$ . Stąd  $d \leq n$ . W takim razie  $k = n - d \in \{0, \dots, n-2\}$ . Różnica

$$c_n - c_k = n(n+1) - k(k+1) = (n-k)(n+k+1) = d(2n-d+1)$$

dzieli się przez  $d$ . Tak więc  $d$  jest wspólnym dzielnikiem liczb  $c_n$  i  $c_k$  ( $= c_{n-d}$ ), i mamy to, o co chodziło.



# LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2015 r. (drugi dzień zawodów)

**Zadanie 4.** Liczby rzeczywiste  $x_1, x_2, x_3, x_4$  są miejscami zerowymi wielomianu czwartego stopnia  $W(x)$  o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli  $x_3 + x_4$  jest liczbą wymierną a  $x_3x_4$  jest liczbą niewymierną, to  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ .

*Rozwiązanie*

Oznaczmy:  $A = x_1 + x_2$ ,  $B = x_3 + x_4$ ,  $P = x_1x_2$ ,  $R = x_3x_4$ . Niech

$$W(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i = a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Wymnażając i przyrównując współczynniki, uzyskujemy związki (zwane wzorami Viète'a)

$$-\frac{a_3}{a_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A + B,$$

$$\frac{a_2}{a_4} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = AB + P + R,$$

$$-\frac{a_1}{a_4} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = AR + BP,$$

$$\frac{a_0}{a_4} = x_1x_2x_3x_4 = PR.$$

Niech  $\mathbb{Q}$  oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Z założenia,  $B \in \mathbb{Q}$ ,  $R \notin \mathbb{Q}$ . Stąd i z pierwszego, a następnie drugiego równania, wnosimy, że  $A \in \mathbb{Q}$ ,  $P + R \in \mathbb{Q}$ . Zatem  $P \notin \mathbb{Q}$ . Trzecie równanie mówi, że  $AR + BP \in \mathbb{Q}$ . Wobec tego

$$(A - B)P = A(P + R) - (AR + BP) \in \mathbb{Q}.$$

Skoro zaś  $A - B \in \mathbb{Q}$ ,  $P \notin \mathbb{Q}$ , iloczyn  $(A - B)P$  należy do  $\mathbb{Q}$  tylko wtedy, gdy  $A - B = 0$ . Ta równość jest tezą zadania.

**Zadanie 5.** Niech  $n$  będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą.

Wyznaczyć liczbę takich ciągów  $a_0, a_1, \dots, a_n$  o wyrazach w zbiorze  $\{0, 1, 2, 3\}$ , że

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n.$$

*Rozwiązanie*

Zauważmy, że w napisanym wzorze ograniczenie (do  $n$ ) wykładników potęg dwójki nie ma znaczenia. Jeśli bowiem zachodzi równość

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^Na_N, \quad \text{gdzie } N \geq n,$$

to wszystkie współczynniki  $a_i$  o numerach  $i > n$  są zerami (bo  $2^{n+1} > n$ ) – odrzucając te składniki, dostajemy wyrażenie, jak w treści zadania. Tak więc liczba, o którą pyta zadanie – oznaczmy ją przez  $F(n)$  – to po prostu liczba przedstawień  $n$  w postaci kombinacji potęg dwójki o dowolnych wykładnikach całkowitych nieujemnych i o współczynnikach równych 0, 1, 2 lub 3.

Jeśli  $n$  jest liczbą nieparzystą, to  $a_0 = 1$  lub 3. Zamieniając ten współczynnik (odpowiednio) na 0 lub 2 dostajemy przedstawienie liczby  $n - 1$ ; na odwrót, z przedstawienia liczby parzystej  $n$  dostajemy (przez zwiększenie o 1 współczynnika  $a_0$ ) przedstawienie liczby  $n + 1$ . Zatem

$$(1) \quad F(2k + 1) = F(2k) \quad \text{dla każdego } k \geq 1.$$

Niech teraz  $n \geq 4$  będzie liczbą parzystą;  $n = 2k$ . Weźmy dowolne jej przedstawienie w postaci danej w zadaniu; oczywiście  $a_0 = 0$  lub 2. Suma

$$a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \dots + 2^{n-1}a_n$$

jest wówczas dopuszczalnym przedstawieniem liczby  $\frac{1}{2}(n - a_0)$ , równej  $k$ , gdy  $a_0 = 0$ , bądź równej  $k - 1$ , gdy  $a_0 = 2$  (niektóre potęgi dwójki przekraczają  $k$ , ale to nieistotne, w myśl uwagi uczynionej na wstępie).

Tak więc każde przedstawienie liczby  $2k$  w wymaganej formie powstaje z pewnego przedstawienia liczby  $k$  (przez pomnożenie przez 2 i dołączenie składnika  $a_0 = 0$ ), bądź też z pewnego przedstawienia liczby  $k - 1$  (przez pomnożenie przez 2 i dołączenie składnika  $a_0 = 2$ ). Wynika stąd zależność rekurencyjna

$$(2) \quad F(2k) = F(k) + F(k - 1) \quad \text{dla każdego } k \geq 2.$$

Łatwo znaleźć wartości bazowe  $F(1) = 1$ ,  $F(2) = F(3) = 2$ . Obliczając kilka następnych wartości, odgadujemy wzór jawny

$$(3) \quad F(2k+1) = F(2k) = k+1; \quad \text{równoważnie: } F(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Wystarczy wykazać, że funkcja  $F(n)$ , określona wzorem (3), spełnia zależność (2). Sprowadza się to do prościutkiego sprawdzenia równości  $k+1 = (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1)$ . Jej prawa strona to  $(\frac{k}{2} + 1) + (\frac{k-2}{2} + 1)$  dla  $k$  parzystych oraz  $(\frac{k-1}{2} + 1) + (\frac{k-1}{2} + 1)$  dla  $k$  nieparzystych. W obu przypadkach jest to liczba  $k+1$ . To dowodzi słuszności wzoru (3), który daje odpowiedź na postawione pytanie.

**Zadanie 6.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Punkt  $K$  jest środkiem boku  $BC$ , punkt  $M$  leży wewnątrz boku  $AB$ . Prosta  $KM$  przecina prostą  $AC$  w takim punkcie  $L$ , że punkt  $C$  leży między  $A$  i  $L$ . Punkt  $N$  jest środkiem odcinka  $LM$ . Prosta  $AN$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w punkcie  $S \neq A$ . Wykazać, że jeśli  $S \neq N$ , to okrąg przechodzący przez punkty  $K$ ,  $N$  i  $S$  jest styczny do prostej  $BC$ .

*Rozwiązanie*

Najpierw pokażemy, że punkt  $N$  leży między punktami  $K$  i  $L$ . Niech  $J$  będzie punktem symetrycznym do  $M$  względem punktu  $K$ . Trójkąty  $KBM$  i  $KCJ$  są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ACJ = \sphericalangle ACB + \sphericalangle KCJ = \sphericalangle ACB + \sphericalangle KBM < 180^\circ.$$

Stąd wynika, że  $J$  leży między  $K$  i  $L$ , czyli  $KL > KJ = KM$ , i w konsekwencji środek  $N$  odcinka  $ML$  znajduje się na odcinku  $KL$ . Mamy więc konfigurację, jak na rysunku: punkty  $A$  i  $N$  leżą po przeciwnych stronach prostej  $BC$  (natomiast uporządkowanie punktów  $A, N, S$  na prostej  $AN$  może być różne).

Niech  $P$  będzie punktem symetrycznym do  $A$  względem punktu  $N$ ; tworzy się równoległobok  $AMPL$ . Mamy równości kątów wpisanych w okrąg  $(ABC)$ :

$$\sphericalangle SCB = \sphericalangle SAB = \sphericalangle PAM, \quad \sphericalangle SBC = \sphericalangle SAC = \sphericalangle APM$$

(ostatnia równość wynika z równoległości  $AL \parallel MP$ ). Trójkąty  $BSC$  i  $PMA$  są więc podobne. Podobieństwo, które przekształca pierwszy z tych trójkątów na drugi, przenosi środek  $K$  boku  $BC$  na środek  $N$  boku  $PA$ . Stąd wynika podobieństwo trójkątów  $SKC$  i  $MNA$ , i w następstwie – równość

$$\sphericalangle SKC = \sphericalangle MNA = \sphericalangle KNA = \begin{cases} 180^\circ - \sphericalangle KNS & \text{przy kolejności } A, N, S, \\ \sphericalangle KNS & \text{przy kolejności } A, S, N. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę okrąg, przechodzący przez punkty  $K, N, S$ . Punkty  $A$  i  $C$  leżą po jednej stronie prostej  $KN$ . Niezależnie od kolejności punktów  $A, N, S$ , uzyskana równość prowadzi (na podstawie twierdzenia o stycznej i cięciwie) do wniosku, że prosta  $BC$  jest styczna do tego okręgu.

