LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym $2AG = GB$, $2BE = EC$ oraz $2CF = FA$. Punkty P i Q leżą na odcinkach EG i FG odpowiednio, przy czym $2EP = PG$ oraz $2GQ = QF$. Udowodnić, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.

2. Dana jest liczba naturalna $A > 1$. Niech $a_1 = A^A$, $a_{n+1} = A^{a_n}$, $b_1 = A^{A+1}$, $b_{n+1} = 2^{b_n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$a_n < b_n\,.$$

3. Rozważmy ciąg $a_n = |n(n+1) - 19|$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dla dowolnego $n \neq 4$ wykazać, że:
jeśli dla każdego $k < n$ liczby a_k i a_n są względnie pierwsze, to a_n jest liczbą pierwszą.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2015 r. (drugi dzień zawodów)

4. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4 są miejscami zerowymi wielomianu czwartego stopnia $W(x)$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli $x_3 + x_4$ jest liczbą wymierną a x_3x_4 jest liczbą niewymierną, to $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

5. Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą.
Wyznaczyć liczbę takich ciągów $a_0, a_1, \ldots, a_n$ o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, że

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^na_n.$$

6. Dany jest trójkąt ABC. Punkt K jest środkiem boku BC, punkt M leży wewnątrz boku AB. Prosta KM przecina prostą AC w takim punkcie L, że punkt C leży między A i L. Punkt N jest środkiem odcinka LM. Prosta AN przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Wykazać, że jeśli $S \neq N$, to okrąg przechodzący przez punkty K, N i S jest styczny do prostej BC.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.