LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dane są takie dodatnie liczby całkowite x i y, że liczba $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ jest całkowita. Udowodnić, że liczba $\frac{x^2}{y}$ jest całkowita.

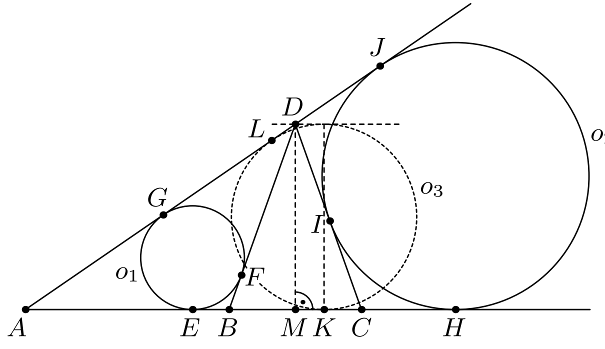
Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia $a=\frac{x^2}{y}$ oraz $b=\frac{y^2}{x}$. Na mocy warunków zadania suma $a+b$ jest liczbą całkowitą. Iloczyn $ab=xy$ również jest liczbą całkowitą. W konsekwencji trójmian kwadratowy $W(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$ ma współczynniki całkowite, a jego pierwiastkami są liczby wymierne a i b.

Z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu wynika teraz, że mianownik ułamka nieskracalnego wyrażającego liczbę a jest dzielnikiem współczynnika wielomianu $W(x)$ przy najwyższej potędze zmiennej. Jednak współczynnik przy potędze x^2 wynosi 1, czyli rozważany mianownik także jest równy 1. Wobec tego liczba a jest całkowita.

Zadanie **2.** Różne punkty A, B i C leżą w podanej kolejności na jednej prostej. Punkt D leży na symetralnej odcinka BC w odległości $h>0$ od tego odcinka. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD, a R — promień okręgu o środku leżącym poza trójkątem ACD, stycznego do odcinka CD oraz stycznego do prostych AC i AD. Wykazać, że $h=r+R$.

Rozwiązanie



rys. 1

Niech o_1, o_2 i o_3 oznaczają okręgi wpisane w kąt BAD o promieniach odpowiednio r, R i $\frac{1}{2}h$ (rys. 1); w treści zadania mowa jest o okręgach o_1 i o_2. Oznaczmy ponadto środek odcinka BC literą M, a punkty styczności okręgów o_1, o_2, o_3 do prostych AC, AD, BD, CD literami od E do L tak jak na rys. 1.

Odcinek DM jest prostopadły do prostej AC, stycznej do okręgu o_3, i ma długość h, równą średnicy tego okręgu. Zatem odcinki stycznych do okręgu o_3 poprowadzonych z punktów M i D mają jednakowe długości. Uzyskany w ten sposób związek $MK=DL$ dowodzi, że

$$AK=AL=\tfrac{1}{2}(AK+AL)=\tfrac{1}{2}(AM+MK+AD-DL)=\tfrac{1}{2}(AM+AD).$$

Korzystając z zależności $AG=AE$, $BE=BF$ i $DF=DG$ obliczamy, że

$$AE=AG=\tfrac{1}{2}(AB-BE+AD-DG)=\tfrac{1}{2}(AB+AD-BF-DF)=\tfrac{1}{2}(AB+AD-BD).$$

Podobnie równości $AJ=AH$, $CH=CI$ oraz $DI=DJ$ prowadzą do wniosku, że $AH=\frac{1}{2}(AC+AD+CD)$. Stąd w myśl związku $BD=CD$ otrzymujemy

$$AE+AH=\tfrac{1}{2}(AB+AD)+\tfrac{1}{2}(AC+AD)=\tfrac{1}{2}(AB+AC)+AD=AM+AD=2AK.$$

Z równości stosunków $\dfrac{r}{AE}=\dfrac{\frac{1}{2}h}{AK}=\dfrac{R}{AH}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sphericalangle BAD$ uzyskujemy więc

$$h=2AK\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sphericalangle BAD=(AE+AH)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sphericalangle BAD=r+R.$$

Zadanie **3.** Dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu

$$W_n(x)=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\ldots+(2n-1)x^2+2nx$$

określonego na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Wielomian $W_n(x)$ jest sumą następujących wielomianów:

$$\begin{aligned}
x^{2n}+2x^{2n-1}+x^{2n-2} &= (x+1)^2\cdot x^{2n-2},\\
2x^{2n-2}+4x^{2n-3}+2x^{2n-4} &= (x+1)^2\cdot 2x^{2n-4},\\
3x^{2n-4}+6x^{2n-5}+3x^{2n-6} &= (x+1)^2\cdot 3x^{2n-6},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
kx^{2n-2k+2}+2kx^{2n-2k+1}+kx^{2n-2k} &= (x+1)^2\cdot kx^{2n-2k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n-2)x^6+(2n-4)x^5+(n-2)x^4 &= (x+1)^2\cdot(n-2)x^4,\\
(n-1)x^4+(2n-2)x^3+(n-1)x^2 &= (x+1)^2\cdot(n-1)x^2,\\
nx^2+2nx &= (x+1)^2\cdot n-n.
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy tożsamość

$$W_n(x)=(x+1)^2[x^{2n-2}+2x^{2n-4}+3x^{2n-6}+\ldots+(n-1)x^2+n]-n,$$

w której czynnik $(x+1)^2$ jest liczbą nieujemną, równą zeru jedynie dla $x=-1$, a czynnik stojący w nawiasie kwadratowym jest liczbą dodatnią, gdyż jest on sumą $n-1$ liczb nieujemnych i liczby dodatniej. Zatem $W_n(x)\geqslant W_n(-1)=-n$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Odpowiedź: Szukana najmniejsza wartość wynosi $-n$.

LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2014 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** W rozgrywkach ligi piłkarskiej wzięło udział $2n$ drużyn ($n \geqslant 2$) i odbyło się $2n-1$ kolejek. W każdej kolejce każda drużyna rozegrała jeden mecz. Dowolne dwie drużyny spotkały się ze sobą podczas rozgrywek w dokładnie jednym meczu. Ponadto w każdym meczu jedna drużyna była gospodarzem, a druga — gościem.
Drużynę nazwiemy *podróżującą*, jeżeli w dowolnych dwóch sąsiednich kolejkach była ona raz gospodarzem i raz gościem. Udowodnić, że istnieją co najwyżej dwie drużyny podróżujące.

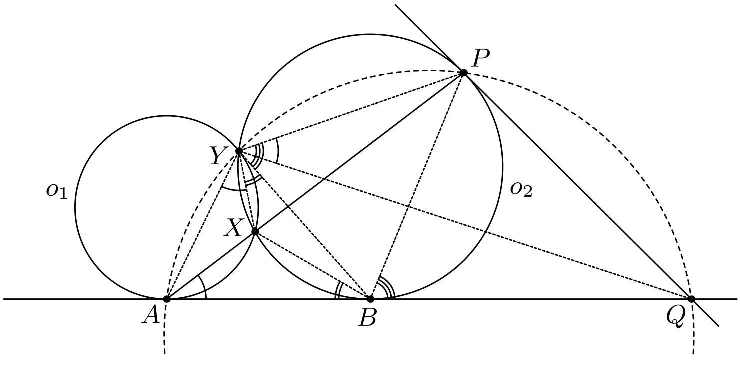
Rozwiązanie

Załóżmy, że istnieją dwie drużyny podróżujące, które w pierwszej kolejce były gospodarzami. Wtedy w drugiej kolejce były one gośćmi, w trzeciej — znów gospodarzami, w czwartej — gośćmi, itd. W każdej kolejce obie drużyny były więc gospodarzami albo obie były gośćmi. Jednocześnie zaś w kolejce, w której drużyny te rozegrały ze sobą mecz, jedna z nich była gospodarzem, a druga — gościem. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem wśród gospodarzy w pierwszej kolejce tylko jedna drużyna może być podróżująca. Podobnie dowodzimy, że wśród gości w pierwszej kolejce może istnieć co najwyżej jedna drużyna podróżująca. Wynika stąd teza.

Zadanie **5.** Okręgi o_1 i o_2, styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punktach X i Y, przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y. Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X. Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q. Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

Rozwiązanie



rys. 2

Z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą otrzymujemy (rys. 2)

(1) $$\sphericalangle AYX = \sphericalangle XAB, \quad \sphericalangle BYX = \sphericalangle XBA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BYP = \sphericalangle PBQ.$$

Dodając stronami pierwsze dwie spośród równości (1) dostajemy

(2) $$\sphericalangle AYB = 180^\circ - \sphericalangle AXB = \sphericalangle BXP = \sphericalangle BYP.$$

Stąd, na mocy trzeciej z równości (1) i związku $QB = QP$, uzyskujemy

$$\sphericalangle AYP = 2\sphericalangle BYP = 2\sphericalangle PBQ = 180^\circ - \sphericalangle AQP.$$

Wobec tego punkty A, Y, P i Q leżą na jednym okręgu. W rezultacie

(3) $$\sphericalangle AYX = \sphericalangle XAB = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle PYQ.$$

Zależności (2) i (3) prowadzą teraz do wniosku, że

$$\sphericalangle XYB = \sphericalangle AYB - \sphericalangle AYX = \sphericalangle BYP - \sphericalangle PYQ = \sphericalangle BYQ.$$

Zadanie **6.** Liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba n jest podzielna przez p, ale nie przez p^2. Dowieść, że wśród liczb 1, 2, 3, ..., 10^{12} liczby dobre stanowią co najmniej 99%.

Rozwiązanie

Niech S oznacza zbiór wszystkich tych dodatnich liczb całkowitych nie przekraczających 10^{12}, które nie są dobre. Wówczas w rozkładzie dowolnej liczby ze zbioru S na czynniki pierwsze wszystkie liczby pierwsze występują z wykładnikami większymi od 1.

Każdej liczbie ze zbioru S przyporządkujmy dodatnią liczbę całkowitą w następujący sposób: jeżeli liczba $s \in S$ ma rozkład na czynniki pierwsze postaci $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, to liczbie s przypisujemy liczbę $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \ldots \cdot p_k^{b_k}$, gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, k$ liczba b_i jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $\frac{1}{2}a_i$. Na mocy określenia zbioru S wykładniki a_1, a_2, ..., a_k są równe co najmniej 2, więc wykładniki b_1, b_2, ..., b_k są dodatnie. W efekcie liczba przyporządkowana liczbie s ma te same dzielniki pierwsze, co liczba s.

Liczbie $s = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ przyporządkowana jest liczba nie większa niż $p_1^{\frac{1}{2}a_1} \cdot p_2^{\frac{1}{2}a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\frac{1}{2}a_k} = \sqrt{s}$, czyli nie przekraczająca 10^6. Zbadamy teraz, ilu różnym elementom zbioru S może być przyporządkowana ta sama liczba.

Elementy zbioru S, którym przypisana jest dodatnia liczba całkowita $t \leqslant 10^6$ o rozkładzie $t = q_1^{c_1} \cdot q_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{c_m}$, mają postać iloczynu $q_1^{d_1} \cdot q_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{d_m}$, w którym wykładnik d_j jest jedną z liczb $2c_j$, $2c_j + 1$ dla $j = 1, 2, \ldots, m$. Każdy z wykładników d_1, d_2, ..., d_m można niezależnie wybrać na dwa sposoby. Zatem istnieje 2^m iloczynów tej postaci; niektóre mogą być większe od 10^{12}. Ponadto $m \leqslant 7$, gdyż liczba mająca więcej niż 7 różnych dzielników pierwszych wynosi co najmniej $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9699690 > 10^6$. Wobec tego liczba t jest przyporządkowana co najwyżej 2^7 elementom zbioru S.

W rezultacie zbiór S ma nie więcej niż $2^7 \cdot 10^6 = 0{,}000128 \cdot 10^{12}$ elementów. Stąd wśród liczb 1, 2, 3, ..., 10^{12} liczby dobre stanowią co najmniej 99,9872%.