LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w, nie będąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba wymierna w spełnia dany warunek i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego $w=\frac{a}{b}$, gdzie a i b są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Liczba w nie jest całkowita, zatem $b>1$. Przedstawmy wreszcie liczbę wymierną w^w jako ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Podnosząc równość (1) stronami do potęgi b, a następnie mnożąc ją obustronnie przez $b^a n^b$, otrzymujemy

$$a^a n^b = m^b b^a. \tag{2}$$

Zależność (2) wskazuje, że liczba n^b jest dzielnikiem iloczynu $m^b b^a$. Ponieważ liczby m i n są względnie pierwsze, więc liczba n^b musi być dzielnikiem liczby b^a. Ponadto — znów na mocy związku (2) — liczba b^a jest dzielnikiem iloczynu $a^a n^b$. Korzystając teraz z faktu, że liczby a i b są względnie pierwsze, dochodzimy do wniosku, że liczba b^a jest dzielnikiem liczby n^b. Wobec tego

$$n^b = b^a. \tag{3}$$

Rozważmy rozkład liczby b na czynniki pierwsze. W myśl równości (3) wykładnik, z jakim dowolna liczba pierwsza wchodzi do tego rozkładu, staje się po pomnożeniu przez a liczbą podzielną przez b. Jednak liczby a i b są względnie pierwsze i w efekcie wykładnik ten musiał być podzielny przez b. Zatem nie tylko liczba b^a, lecz także liczba b jest b-tą potęgą liczby całkowitej.

Niech więc $b=c^b$, gdzie c jest nieujemną liczbą całkowitą. Zależność $b>1$ dowodzi, że $c>1$, czyli $c\geqslant 2$. Stąd $b=c^b\geqslant 2^b$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż dla każdej liczby całkowitej $k\geqslant 2$ prawdziwa jest przeciwna nierówność $k<2^k$. Aby ją uzasadnić, stosujemy indukcję. Dla $k=2$ nierówność jest prawdziwa. Natomiast krok indukcyjny sprowadza się do spostrzeżenia, że jeżeli $k<2^k$ dla pewnej wartości $k\geqslant 2$, to

$$k+1<2^k+1<2^k+2^k=2^{k+1}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Taka liczba nie istnieje.

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie pary (m,n) dodatnich liczb całkowitych, dla których sześcian K o krawędzi n można obudować prostopadłościennymi klockami o wymiarach $m\times1\times1$ w taki sposób, by powstał sześcian o krawędzi $n+2$, mający ten sam środek co K.

Rozwiązanie

Niech C będzie sześcianem o krawędzi $n+2$, podzielonym na sześciany jednostkowe, które nazwiemy *kostkami.* Umieśćmy sześcian C w trójwymiarowym układzie współrzędnych tak, by był on zbiorem punktów o wszystkich współrzędnych należących do przedziału $\langle -\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}\rangle$. Wówczas wszystkie współrzędne środka dowolnej kostki należą do zbioru $\{0,1,2,\ldots,n+1\}$.

Kostki nie przylegające do brzegu sześcianu C tworzą sześcian o krawędzi n współśrodkowy z C. Jest to sześcian K, o którym mowa w treści zadania. Należy zatem wyznaczyć takie pary (m,n), że wszystkie kostki brzegowe można połączyć w klocki zbudowane z m kostek, będące prostopadłościanami o wymiarach $m\times1\times1$.

Wpiszmy w każdą kostkę brzegową liczbę ze zbioru $S=\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ w następujący sposób: jeżeli środek kostki ma współrzędne (x,y,z), to wpisujemy w nią resztę z dzielenia sumy $x+y+z$ przez m. Wtedy w dowolnym prostopadłościanie $m\times1\times1$ zbudowanym z m kostek brzegowych sumy współrzędnych środków tych kostek tworzą ciąg m kolejnych liczb całkowitych, czyli każdy element zbioru S pojawia się dokładnie raz. Wobec tego jeżeli para (m,n) ma własność opisaną w treści zadania, to wśród wszystkich kostek brzegowych każdy element zbioru S występuje tyle samo razy.

Zbiór punktów o równych trzech współrzędnych tworzy prostą ℓ przechodzącą przez dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu C. Obrót o kąt $120°$ wokół prostej ℓ przekształca sześcian C w siebie oraz kostki brzegowe w kostki brzegowe, a ponadto przeprowadza punkt (x,y,z) na punkt (y,z,x) o takiej samej sumie współrzędnych. Przy tym jedynie kostka o środku $(0,0,0)$ oraz kostka o środku $(n+1,n+1,n+1)$ przechodzą na siebie; nazwijmy je kostkami *wyjątkowymi.* Pozostałe kostki brzegowe pod wpływem obrotu łączą się w trójki o środkach postaci (x,y,z), (y,z,x) i (z,x,y). Liczby wpisane we wszystkie kostki takiej trójki są więc równe. Wynika stąd, że wśród kostek brzegowych niewyjątkowych liczba wystąpień każdego elementu zbioru S jest podzielna przez 3.

Jeżeli pewien element zbioru S nie jest wpisany w żadną z dwóch kostek wyjątkowych, to liczba jego wystąpień wśród wszystkich kostek brzegowych jest podzielna przez 3. Z kolei dla elementu $s\in S$ wpisanego w jedną z kostek wyjątkowych — zależnie od tego, czy w drugiej kostce wyjątkowej także znajduje się s — liczba wystąpień daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Aby więc wszystkie elementy zbioru S mogły pojawić się tyle samo razy, każda liczba wpisana w dowolną kostkę musi również wystąpić w pewnej kostce wyjątkowej.

W rezultacie albo $m=1$, albo też $m=2$ i wówczas kostki wyjątkowe zawierają dwie różne liczby. W drugim przypadku sumy współrzędnych środków tych kostek, równe 0 oraz $3n+3$, dają różne reszty z dzielenia przez 2, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Pozostaje sprawdzić, że dla $m=1$ oraz dla $m=2$ i parzystych wartości n można pogrupować kostki w prostopadłościany $m\times 1\times 1$. Dla $m=1$ nie ma czego dowodzić. Jeżeli zaś $m=2$, to kostki brzegowe można podzielić na ścianę dolną i górną — obie będące prostopadłościanami $(n+2)\times(n+2)\times 1$ — oraz na pionowe słupy o wymiarach $1\times 1\times n$. Dla parzystych n każdą z tych dwóch ścian oraz każdy słup można oczywiście rozbić na prostopadłościany $2\times 1\times 1$.

Odpowiedź: Para (m,n) ma żądaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy $m=1$ lub gdy $m=2$ i n jest liczbą parzystą.

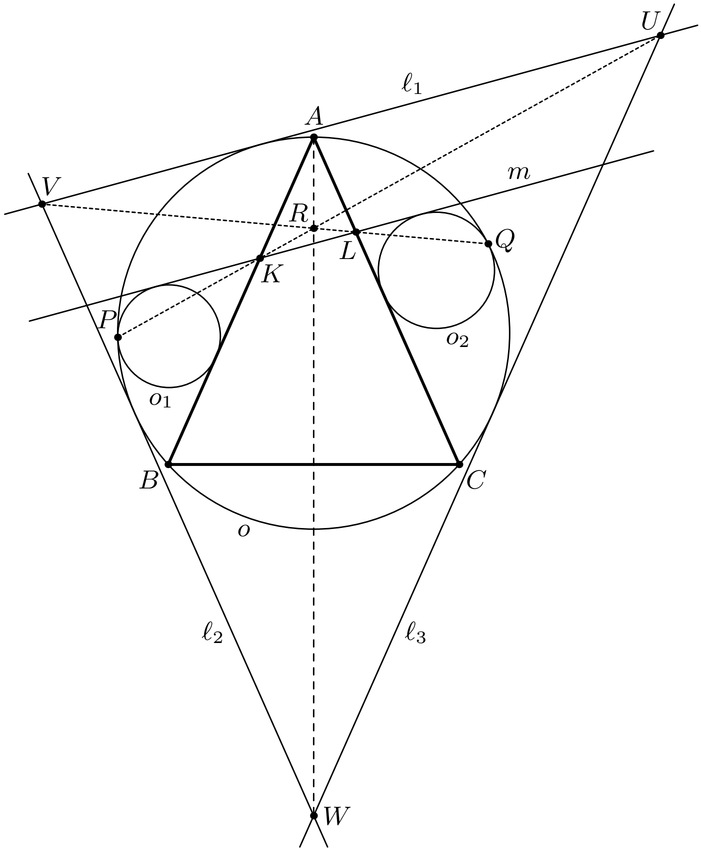
Zadanie **3.** Trójkąt ABC, w którym $AB=AC$, jest wpisany w okrąg o. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q, są też styczne odpowiednio do odcinków AB i AC oraz są rozłączne z wnętrzem trójkąta ABC. Niech m będzie taką prostą styczną do okręgów o_1 i o_2, że punkty P i Q leżą po przeciwnej jej stronie niż punkt A. Prosta m przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że punkt przecięcia prostych PK i QL leży na dwusiecznej kąta BAC.

Rozwiązanie

Poprowadźmy trzy proste styczne do okręgu o: prostą ℓ_1 równoległą do prostej m i leżącą po przeciwnej jej stronie niż punkty B i C, prostą ℓ_2 równoległą do prostej AC i leżącą po tej samej jej stronie co punkt B, oraz prostą ℓ_3 równoległą do prostej AB i leżącą po tej samej jej stronie co punkt C. Oznaczmy ponadto symbolami U, V i W wierzchołki trójkąta wyznaczonego przez proste ℓ_1, ℓ_2 i ℓ_3 w sposób wskazany na rys. 1.

Jednokładność o środku P, która odwzorowuje okrąg o_1 na okrąg o, przekształca proste m i AB styczne do okręgu o_1 na proste ℓ_1 i ℓ_3 styczne do okręgu o. Zatem przeprowadza ona punkt K przecięcia prostych m i AB na punkt U przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_3. Stąd wniosek, że punkty P, K i U leżą na jednej prostej. Analogicznie punkty Q, L i V leżą na jednej prostej.

Niech R będzie punktem przecięcia prostych PK i QL. Rozpatrzmy jednokładność j o środku R przekształcającą prostą m na prostą ℓ_1; zachowuje ona proste KU i LV, czyli przeprowadza punkty K i L odpowiednio na punkty U i V. Wobec tego j odwzorowuje prostą AB przechodzącą przez punkt K na równoległą do niej prostą przechodzącą przez punkt U, a więc na prostą ℓ_3. Podobnie uzasadniamy, że j przekształca prostą AC na prostą ℓ_2. To oznacza, że proste zawierające boki trójkąta AKL są odwzorowywane przez jednokładność j na proste zawierające boki trójkąta WUV. W efekcie oba te trójkąty są jednokładne względem punktu R, co dowodzi, że punkt R leży na prostej AW.



rys. 1

Do zakończenia pozostaje jeszcze wykazać, że punkt W leży na dwusiecznej kąta BAC. Jednak przy symetrii względem tej dwusiecznej prosta AB przechodzi na prostą AC, a z równości $AB = AC$ wynika, że okrąg o przechodzi na siebie. Zatem prosta ℓ_2 przechodzi przy tej symetrii na prostą ℓ_3, czyli punkt ich przecięcia W leży na osi tej symetrii, co kończy rozwiązanie.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2012 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A,B,C,D), że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z D oraz D wygrał z A. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A,B,C), że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

(*Uwaga:* Trójki (A,B,C), (B,C,A) i (C,A,B) uważamy za jedną trójkę.)

Rozwiązanie

Nazwijmy *trójką remisową* zbiór złożony z trzech zawodników, których można tak oznaczyć literami A, B, C, że A wygrał z B, B wygrał z C i C wygrał z A. Mamy więc znaleźć największą możliwą liczbę trójek remisowych.

Wykażemy, że jeden zawodnik nie może należeć do dwóch różnych trójek remisowych. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że dwie różne trójki mają wspólnych niektórych zawodników. Wtedy istnieje taki zawodnik A należący do obu tych trójek, że zawodnik pokonany przez A w pierwszej trójce jest inny niż zawodnik pokonany przez A w drugiej trójce. Tych dwóch zawodników, którzy przegrali z A, możemy tak oznaczyć symbolami B i C, że B wygrał z C. Niech ponadto D będzie trzecim zawodnikiem tej z rozważanych trójek, do której należą A i C; wówczas D przegrał z C oraz wygrał z A. Wobec tego A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z D oraz D wygrał z A, co przeczy warunkom zadania.

Zatem każdy zawodnik należy do co najwyżej jednej trójki remisowej. Stąd wniosek, że trzykrotność liczby tych trójek nie przekracza n. W efekcie trójek remisowych jest nie więcej niż m, gdzie m jest największą liczbą całkowitą, dla której $m \leqslant \frac{1}{3}n$.

Wskażemy teraz przykład turnieju o wymaganej własności, w którym liczba trójek remisowych wynosi co najmniej m.

W tym celu ponumerujmy zawodników liczbami $1, 2, 3, \ldots, n$ i określmy wyniki rozgrywek przyjmując, że każdy mecz został wygrany przez zawodnika o mniejszym numerze, z następującymi wyjątkami: dla $k=1,2,3,\ldots,m$ zawodnik o numerze $3k-2$ przegrał z zawodnikiem o numerze $3k$. Wówczas dla $k=1,2,3,\ldots,m$ zawodnicy o numerach $3k-2$, $3k-1$ i $3k$ tworzą trójkę remisową.

Przypuśćmy wreszcie, że istnieje czwórka (A,B,C,D) opisana w treści zadania; możemy przyjąć, że zawodnik A ma w tej czwórce najmniejszy numer. Ponieważ A przegrał z zawodnikiem D o większym numerze, więc dla pewnego k zawodnicy A i D mają odpowiednio numery $3k-2$ i $3k$. To oznacza, że D pokonał zawodników o numerach większych od $3k$. W takim razie C ma numer mniejszy od $3k$ i większy od $3k-2$, czyli numer $3k-1$. Jednak w tej sytuacji numer zawodnika B wynosi co najmniej $3k+1$, a każdy taki zawodnik przegrał z C, w sprzeczności z przypuszczeniem, że B wygrał z C.

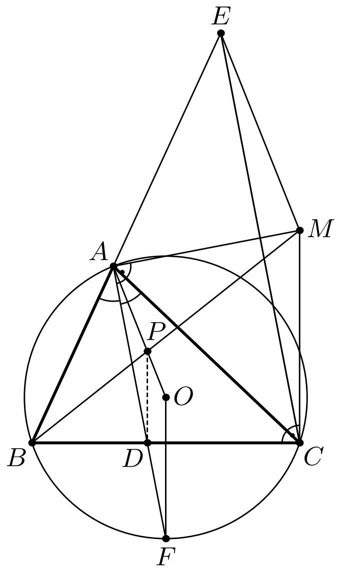
Wynika stąd, że największa możliwa liczba trójek remisowych wynosi m.

Odpowiedź: Szukana największa możliwa liczba trójek jest równa największej liczbie całkowitej nie przekraczającej $\frac{1}{3}n$.

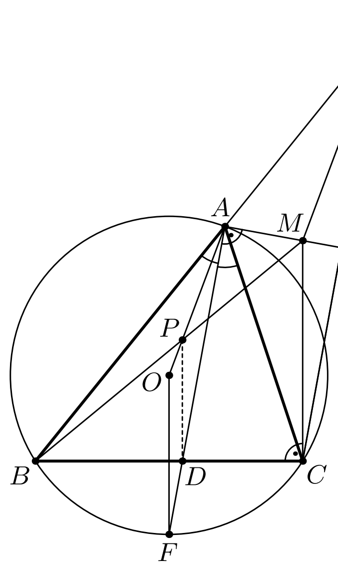
Zadanie **5.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P. Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC.

Rozwiązanie

Jeżeli $AB = AC$, to odcinek AD zawiera punkt O i jest prostopadły do boku BC. Ponadto $BD = DC$ oraz czworokąt $ADCM$ jest prostokątem. W efekcie punkt P jest środkiem odcinka AD, czyli odcinek ten jest średnicą okręgu o środku P i przechodzącego przez punkt A, co pociąga za sobą tezę.



rys. 2



rys. 3

Przyjmijmy więc, że $AB \neq AC$. Na przedłużeniu boku BA poza punkt A odłóżmy taki punkt E, że $AE = AC$ (rys. 2 i 3, na których przedstawione są odpowiednio przypadki $AB < AC$ i $AB > AC$). Na mocy założenia $AB \neq AC$ punkt E nie leży prostej MC.

Z określenia punktu D i warunku $MA \perp AD$ wnioskujemy, że punkt M leży na dwusiecznej kąta CAE. Ponieważ zaś trójkąt CAE jest równoramienny, więc prosta AM jest symetralną odcinka CE. Zatem $ME = MC$, a przy tym $MA \perp CE$ i w rezultacie $EC \parallel AD$.

Niech F będzie punktem, w którym dwusieczna kąta BAC ponownie przecina okrąg opisany na trójkącie ABC. Punkt F jest środkiem łuku BC tego okręgu. W takim razie $OF \perp BC$, co oznacza, że $OF \parallel MC$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej trójkątom FOA i CME. Są to trójkąty równoramienne, w których $OF = OA$ oraz $MC = ME$. Punkty O, A, M i E leżą po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt F, więc z wykazanych wyżej równoległości $AF \parallel EC$ i $OF \parallel MC$ uzyskujemy równość $\sphericalangle OFA = \sphericalangle MCE$. Wobec tego w obu rozważanych trójkątach równoramiennych kąty między ramieniem a podstawą są równe, czyli trójkąty te są podobne. Co więcej, ich podstawy AF i EC są równoległe oraz ramiona OF i MC są równoległe. Zatem ramię OA jest równoległe do ramienia ME.

W ten sposób udowodniliśmy, że $AP \parallel EM$. Stosując twierdzenie Talesa do kątów EBM i EBC otrzymujemy

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}.$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika stąd, że $PD \parallel MC$ i w konsekwencji $PD \perp BC$. Ponadto w trójkącie równoramiennym FOA odcinek PD jest równoległy do ramienia OF, czyli trójkąt DPA jest równoramienny i $PD = PA$. To wraz z prostopadłością $PD \perp BC$ dowodzi, że okrąg o środku P przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC w punkcie D.

Zadanie **6.** Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$(1) \quad \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right).$$

Rozwiązanie

Mnożąc obustronnie nierówność (1) przez liczbę dodatnią $a^2b^2c^2$ uzyskujemy równoważną postać

$$a^2b^2(a-b)^2 + b^2c^2(b-c)^2 + c^2a^2(c-a)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abc[ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)].$$

Ponieważ

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = ab(a-b) + c(b^2-a^2) + c^2(a-b) =$$
$$= (a-b)[ab - c(a+b) + c^2] = (a-b)(a-c)(b-c),$$

więc należy wykazać, że

$$(2) \quad a^2b^2(a-b)^2 + b^2c^2(b-c)^2 + c^2a^2(c-a)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abc(a-b)(a-c)(b-c).$$

Obie strony nierówności (1) nie ulegają zmianie pod wpływem cyklicznego przestawienia symboli a, b, c. Możemy wobec tego przyjąć, że a jest największą spośród danych trzech liczb (lub jedną z największych). Jeżeli $b < c$, to nierówność (2) zachodzi, gdyż jej prawa strona jest niedodatnia, lewa zaś — nieujemna. Przypuśćmy zatem, że $a \geqslant b \geqslant c$. Wówczas liczby $x = a - b$ oraz $y = b - c$ są nieujemne, a dowodzoną zależność (2) możemy przepisać w postaci

$$a^2b^2x^2 + b^2c^2y^2 + c^2a^2(x+y)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abcxy(x+y). \tag{3}$$

Zastosujmy nierówność $u + w \geqslant 2\sqrt{uw}$ do liczb nieujemnych $u = b^2c^2y^2$, $w = c^2a^2(x+y)^2$ oraz do liczb nieujemnych $u = abx^2y(x+y)$, $w = 2abc^2y(x+y)$. Otrzymujemy następujące dwie zależności:

$$b^2c^2y^2 + c^2a^2(x+y)^2 \geqslant 2abc^2y(x+y)$$

oraz

$$abx^2y(x+y) + 2abc^2y(x+y) \geqslant 2\sqrt{2}\,abcxy(x+y);$$

dodając je stronami i redukując wyrazy podobne stwierdzamy, że

$$abx^2y(x+y) + b^2c^2y^2 + c^2a^2(x+y)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abcxy(x+y). \tag{4}$$

Porównując (3) i (4) widzimy, że po obu stronach występują jednakowe składniki z wyjątkiem pierwszych składników lewych stron. W takim razie nierówność (3) wyniknie z nierówności (4), jeżeli udowodnimy, że te pierwsze składniki spełniają warunek $a^2b^2x^2 \geqslant abx^2y(x+y)$, czyli $abx^2[ab - y(x+y)] \geqslant 0$. Ostatnia nierówność jest jednak prawdziwa, gdyż $abx^2 \geqslant 0$ oraz

$$ab = (c+x+y)(c+y) > (x+y)y,$$

a więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym ma wartość dodatnią.

W ten sposób wykazaliśmy związek (3), co pociąga za sobą tezę zadania.