LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

17 lutego 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3+b=c, \\ b^3+c=d, \\ c^3+d=a, \\ d^3+a=b. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmijmy stronami trzecie równanie danego układu od pierwszego równania. Otrzymujemy

$$a^3+b-c^3-d=c-a,$$

czyli

$$b-d=c^3-a^3+c-a.$$

Zauważmy teraz, że liczby c^3-a^3 i $c-a$ mają jednakowy znak: dla $c>a$ obie te liczby są dodatnie, dla $c<a$ obie są ujemne, a dla $c=a$ obie są równe zeru. Zatem także liczby $b-d$ i $c-a$ mają jednakowy znak.

Odejmując zaś stronami czwarte równanie układu od drugiego dostajemy

$$c-a=d^3-b^3+d-b,$$

skąd analogicznie wnioskujemy, że liczby $c-a$ i $d-b$ mają jednakowy znak. To wraz z równością znaków liczb $c-a$ i $b-d$ dowodzi, że $c-a=d-b=0$, a więc $a=c$ oraz $b=d$. Wobec tego dany w treści zadania układ sprowadza się do następującego układu dwóch równań:

$$a^3+b=a \qquad \text{oraz} \qquad b^3+a=b.$$

Dodając stronami powyższe dwa równania widzimy, że $a^3+b^3=0$, czyli $a=-b$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że $(a,b,c,d)=(t,-t,t,-t)$ dla pewnej liczby rzeczywistej t. Ponadto wszystkie równania rozważanego układu przyjmują postać $t^3-t=t$, czyli $0=t^3-2t=t(t^2-2)$. W efekcie warunki zadania są spełnione dla następujących trzech wartości parametru t: 0, $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$.

Odpowiedź: Wszystkimi rozwiązaniami (a,b,c,d) danego układu są:

$$(0,0,0,0), \qquad (\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Zadanie **2.** Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i CAD są równe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez I oraz S odpowiednio środek sfery wpisanej w dany czworościan oraz jego środek ciężkości. Niech ponadto proste DI i DS przecinają ścianę ABC odpowiednio w punktach I' i S'. Wówczas punkty D, I oraz S leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $I' = S'$.

Punkt I — a więc także punkt I' — jest jednakowo odległy od ścian ABD, BCD i CAD. Co więcej, I' jest jedynym takim punktem trójkąta ABC. To oznacza, że punkty D, I oraz S leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy punkt S' jest jednakowo odległy od rozważanych trzech ścian.

Z drugiej strony, punkt S' jest środkiem ciężkości ściany ABC, zatem pola trójkątów ABS', BCS' i CAS' są równe. Wobec tego objętości czworościanów $ABS'D$, $BCS'D$ i $CAS'D$, mających wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka D, są równe. W takim razie iloczyn pola dowolnego spośród trójkątów ABD, BCD, CAD i odległości punktu S' od płaszczyzny tego trójkąta jest taki sam dla wszystkich trzech trójkątów. To zaś prowadzi do wniosku, że trójkąty te mają jednakowe pola wtedy i tylko wtedy, gdy odległości punktu S' od tych ścian są równe, skąd uzyskujemy tezę.

Zadanie **3.** Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest nieprawdziwa. Wobec tego istnieje taki $(m+1)$-elementowy zbiór A zawarty w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$, że żadna liczba $x \in A$ nie jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m elementów zbioru A. Każda liczba $x \in A$ ma więc dzielnik pierwszy p, który wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby x z wykładnikiem wyższym niż do rozkładu na czynniki pierwsze iloczynu pozostałych m liczb ze zbioru A.

Dla ustalonego elementu $x \in A$ liczba pierwsza p o własności opisanej w poprzednim zdaniu nie musi być jedyna — jeżeli jest ich więcej, wybieramy dowolną z nich. W ten sposób każdemu elementowi $x \in A$ przypisaliśmy liczbę pierwszą ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jednak zbiór A składa się z $m+1$ elementów, a do dyspozycji mamy tylko m liczb pierwszych. W rezultacie pewna liczba pierwsza p została przyporządkowana dwóm różnym elementom $x, y \in A$.

Niech w oznacza iloczyn $m-1$ elementów zbioru A różnych od x i y. Na mocy określenia liczby p istnieją takie nieujemne całkowite wykładniki k i ℓ, że potęga p^k jest dzielnikiem liczby x, ale nie iloczynu wy, a potęga p^ℓ jest dzielnikiem liczby y, ale nie iloczynu wx. Zatem w rozkładzie iloczynu $wy \cdot wx$ liczba pierwsza p występuje z wykładnikiem niższym niż $k+\ell$, mimo że iloczyn ten jest podzielny przez liczbę xy, która z kolei jest podzielna przez $p^{k+\ell}$.

Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2012 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x)-y)=f(g(y))+x. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Oznaczmy $a=f(g(0))$. Podstawiając $y=0$ w warunku (1) otrzymujemy

$$g(f(x))=f(g(0))+x=a+x. \tag{2}$$

Biorąc zaś $y=f(x)$ w zależności (1) i wykorzystując związek (2) dostajemy

$$g(0)=f(g(f(x)))+x=f(a+x)+x \tag{3}$$

dla każdego x. Niech teraz z będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Przyjmując $x=z-a$ w równości (3) stwierdzamy, że

$$f(z)=f(a+x)=g(0)-x=g(0)-z+a=c-z \qquad \text{dla dowolnego } z, \tag{4}$$

gdzie oznaczyliśmy $c=g(0)+a$. Wobec tego związek (2) przybiera postać

$$g(c-x)=a+x. \tag{5}$$

Podstawiając $x=c-t$ w zależności (5) uzyskujemy

$$g(t)=g(c-(c-t))=a+(c-t) \qquad \text{dla dowolnego } t. \tag{6}$$

Na mocy równości (6) zastosowanej dla $t=0$ oraz równości (4) otrzymujemy $a=f(g(0))=f(a+c)=c-(a+c)=-a$, czyli $a=0$. Zatem zależności (4) i (6) prowadzą do wniosku, że

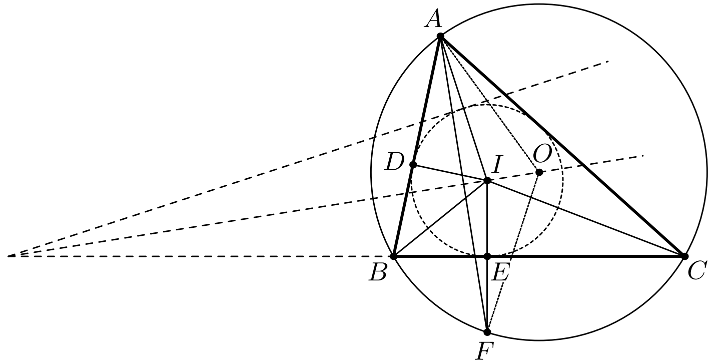
$$f(x)=g(x)=c-x \qquad \text{dla każdego } x. \tag{7}$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej wartości c funkcje f i g zadane wzorami (7) spełniają równość (1) — obie jej strony są wówczas równe $x+y$.

Odpowiedź: Wszystkie pary funkcji f, g o żądanej własności są opisane zależnością $f(x)=g(x)=c-x$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zadanie **5.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB=60^\circ$ oraz $AB\neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie



rys. 1

Zauważmy najpierw, że na mocy zależności $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ mamy

(1) $\quad \sphericalangle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CAB) = 120^\circ.$

Oznaczmy przez D i E rzuty prostokątne punktu I odpowiednio na boki AB i BC. Niech ponadto F będzie punktem symetrycznym do punktu I względem prostej BC (rys. 1 przedstawia sytuację, gdy $AB < AC$, jednakże rozwiązanie zachowuje moc dla $AB > AC$). Punkty F i A leżą po przeciwnych stronach prostej BC, a przy tym na podstawie związku (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle BFC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle BIC + \sphericalangle CAB = 180^\circ.$$

Wobec tego punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, skąd

(2) $$OA = OF.$$

Z drugiej strony, w trójkącie prostokątnym ADI kąt ostry ma miarę $\sphericalangle IAD = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 30^\circ$ i w takim razie

(3) $$IA = 2ID = 2IE = IF.$$

Równości (2) i (3) dowodzą, że punkty O oraz I leżą na symetralnej odcinka AF. Zatem symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC są symetralnymi boków trójkąta IAF, a więc przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie **6.** Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że wymaganą własność ma każda liczba postaci $n = 10^m + 3$, gdzie $m \geqslant 2$ jest liczbą całkowitą.

Zauważmy w tym celu, że dla każdego całkowitego $k \geqslant 1$ liczba 2^{20k+3} daje resztę 8 z dzielenia przez 100. Rzeczywiście, z równości $2^{20} = 1048576$

wynika, że liczba $2^{20k}=(2^{20})^k$ jest iloczynem k liczb dających resztę 76 z dzielenia przez 100. Ponadto dla dowolnych liczb całkowitych a i b mamy $(100a+76)(100b+76)=100(100ab+76a+76b+57)+76$, skąd wnioskujemy, że iloczyn liczb dających resztę 76 z dzielenia przez 100 również jest taką liczbą. Wobec tego $2^{20k}=100\ell+76$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ, a więc $2^{20k+3}=8(100\ell+76)=100(8\ell+6)+8$.

Liczba n daje resztę 3 z dzielenia przez 20. Zatem $2^n=100x+8$ dla pewnej liczby całkowitej x, skąd uzyskujemy $S(2^n)=S(x)+8$ oraz

$$S(2^n+3)=S(100x+11)=S(x)+2=S(2^n)-6. \tag{1}$$

Z drugiej strony, dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej y prawdziwa jest nierówność $S(y+10^m)\leqslant S(y)+1$. Istotnie, pisemne dodawanie $y+10^m$ polega na dodaniu jedynki do pewnej pozycji w zapisie dziesiętnym liczby y. Jeżeli na tej pozycji stoi cyfra różna od 9, to zwiększamy ją o 1, a pozostałe cyfry nie zmieniają się, czyli $S(y+10^m)=S(y)+1$. Z kolei gdy na rozważanej pozycji stoi cyfra 9, to w wyniku dodawania $y+10^m$ zamieniamy blok pewnej liczby kolejnych dziewiątek na zera oraz zwiększamy o 1 cyfrę stojącą przed tym blokiem. Oznaczając przez d liczbę zamienionych dziewiątek widzimy, że $S(y+10^m)=S(y)-9d+1<S(y)$.

W rezultacie

$$S(2^n+n)=S(2^n+3+10^m)\leqslant S(2^n+3)+1,$$

co w połączeniu z zależnością (1) pozwala stwierdzić, że $S(2^n+n)\leqslant S(2^n)-5$. Rozwiązanie jest więc zakończone.