

LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

17 lutego 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

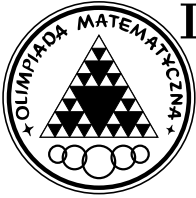
$$\begin{cases} a^3 + b = c, \\ b^3 + c = d, \\ c^3 + d = a, \\ d^3 + a = b. \end{cases}$$

2. Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D , środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD , BCD i CAD są równe.

3. Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2012 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI , prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

6. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.