LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2011 r. – 3 października 2011 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z \\ (y+z)^3 = 8x \\ (z+x)^3 = 8y \end{cases}$$

2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE = AD$ i $BF = BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE = SF$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n-(b-a)}\,.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2011 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (4 października 2011 r. – 3 listopada 2011 r.)

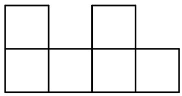
5. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i = 1, 2, \ldots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1 + a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:



Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 listopada 2011 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

III seria (4 listopada 2011 r. – 5 grudnia 2011 r.)

9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 1$, że liczba $1+2^{n+1}+4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1+2^n+4^n$.

10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

11. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA', BB', CC', SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1,1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1,2,1)$, w drugim kroku ciąg $(1,3,2,3,1)$ itd.

Dla każdego $n \geqslant 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n-tym kroku.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2011 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

• Dla województwa pomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

• Dla województwa śląskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

• Dla województwa małopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

• Dla województwa lubelskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

• Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

• Dla województwa wielkopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

• Dla województwa podkarpackiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

• Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

• Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

• Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

• Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`