



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2011 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$$

5. Wysokości czworościanu $ABCD$ przecinają się w punkcie H leżącym wewnątrz czworościanu. Prosta DH przecina ścianę ABC w punkcie P , a sferę opisaną na danym czworościanie w punkcie Q różnym od D . Udowodnić, że $PQ = 2HP$.

6. Dowieść, że nie istnieją takie wielomiany $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ o współczynnikach wymiernych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$x^2 + 7 = (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + (f_3(x))^2 + (f_4(x))^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.