LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2010 r. – 6 grudnia 2010 r.)

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie takie pary (a,b) liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{4+\sqrt{7}}.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dodatnie liczby wymierne a i b spełniają daną w treści zadania równość. Przekształcając ją otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} a+2\sqrt{ab}+b &= 4+\sqrt{7},\\ 2\sqrt{ab} &= 4-a-b+\sqrt{7},\\ 4ab &= (4-a-b)^2+2(4-a-b)\sqrt{7}+7,\\ 4ab-(4-a-b)^2-7 &= 2(4-a-b)\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Liczby a i b są wymierne, zaś liczba $\sqrt{7}$ jest niewymierna. Zatem ostatnia z powyższych równości może mieć miejsce jedynie wtedy, gdy obie jej strony są równe zeru, skąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 4ab=7 \end{cases}.$$

By rozwiązać ten układ obliczamy, że $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4^2-7=9$, skąd uzyskujemy alternatywę dwóch układów:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=-3 \end{cases}.$$

To daje dwie pary: $(a,b)=(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$ oraz $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{7}{2})$.

Pozostaje sprawdzić, że obie te pary mają żądaną własność, czyli że prawdziwa jest równość $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{4+\sqrt{7}}$. O jej prawdziwości przekonujemy się jednak natychmiast po obustronnym podniesieniu do kwadratu.

Odpowiedź: Szukanymi parami są $(a,b)=(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$ i $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{7}{2})$.

Zadanie **2.** Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz d. Udowodnić, że jeżeli liczby m^2n+1 i mn^2+1 są podzielne przez d, to również liczby m^3+1 i n^3+1 są podzielne przez d.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że liczba

$$n(m^2n+1)-m(mn^2+1)=n-m$$

jest podzielna przez d, gdyż lewa strona jest różnicą dwóch iloczynów, w których drugi czynnik jest podzielny przez d. Ponadto

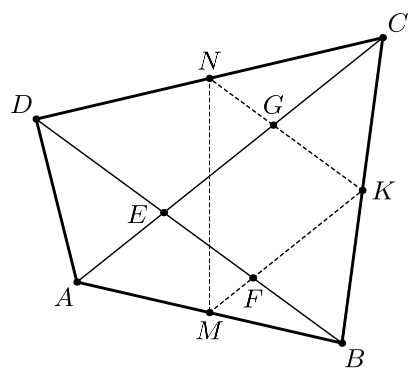
$$m^3+1=m^2(m-n)+(m^2n+1),$$
$$n^3+1=n^2(n-m)+(mn^2+1),$$

a więc liczby m^3+1 i n^3+1 są sumami liczb podzielnych przez d, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **3.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD, zaś przekątne przecinają się w punkcie E. Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC=BD$.

Rozwiązanie

Niech K będzie środkiem boku BC, niech F będzie punktem przecięcia odcinków KM i BD oraz niech G będzie punktem przecięcia odcinków KN i AC (rys. 1).



rys. 1

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa uzyskujemy

(1) $\quad KM \parallel AC$ i $KM=\frac{1}{2}AC \quad$ oraz $\quad KN \parallel BD$ i $KN=\frac{1}{2}BD.$

Wobec tego czworokąt $EFKG$ jest równoległobokiem, a więc dwusieczna kąta BEC jest równoległa do dwusiecznej kąta MKN.

Jak wiadomo, dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie jest prostopadła do przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy dwa boki przyległe do tego kąta mają równe długości. Zatem dwusieczna kąta MKN jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $KM=KN$; z kolei w myśl zależności (1) warunki $KM=KN$ i $AC=BD$ są równoważne. To kończy dowód równoważności sformułowanej w zadaniu.

Zadanie **4.** Dana jest liczba naturalna k. Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż 3^k elementów, można wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór S o nastepującej własności:
Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $A, B \subseteq S$ suma wszystkich elementów zbioru A jest różna od sumy wszystkich elementów zbioru B. (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0.)

Rozwiązanie

Zbiory o opisanej własności nazwiemy *zbiorami rozróżniającymi sumy.*

Udowodnimy, że jeżeli $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ jest n-elementowym zbiorem liczb całkowitych rozróżniającym sumy, to istnieje co najwyżej 3^n takich liczb całkowitych x, że $X'=\{x,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ nie jest $(n+1)$-elementowym zbiorem rozróżniającym sumy.

Wykluczamy najpierw wartości $x=x_1,x_2,\ldots,x_n$, gdyż dla nich zbiór X' nie ma $n+1$ różnych elementów.

Następnie, jeżeli zbiór X' nie rozróżnia sum, to istnieją dwa różne podzbiory $A, B \subseteq X'$ o jednakowych sumach elementów. Usuwając z nich wspólne elementy możemy przyjąć, iż są to podzbiory rozłączne. Ponadto zbiór X rozróżnia sumy, a więc do jednego z tych podzbiorów musi należeć liczba x; niech na przykład $x \in A$. Zatem $A=\{x,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_p}\}$ i $B=\{x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_q}\}$, gdzie wszystkie wskaźniki i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q są różne. Zbiory A i B mają jednakowe sumy elementów, skąd uzyskujemy równość

$$x=x_{j_1}+x_{j_2}+\ldots+x_{j_q}-x_{i_1}-x_{i_2}-\ldots-x_{i_p}.$$

Wobec tego x jest liczbą postaci $\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\ldots+\varepsilon_nx_n$, gdzie $\varepsilon_i \in \{-1,0,1\}$ dla $i=1,2,\ldots,n$; taką postać mają również wykluczone wcześniej wartości $x=x_1,x_2,\ldots,x_n$. Ponieważ istnieje 3^n ciągów n-elementowych $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ o wyrazach z 3-elementowego zbioru $\{-1,0,1\}$, więc istnieje co najwyżej 3^n liczb wskazanej postaci, co dowodzi początkowego stwierdzenia.

Przechodząc do rozwiązania zadania oznaczmy przez K dany w treści zbiór liczb całkowitych, mający więcej niż 3^k elementów. Wybierzmy najpierw dowolny jednoelementowy podzbiór $S_1 \subseteq K$, którego elementem jest liczba różna od zera; podzbiór ten oczywiście rozróżnia sumy. Przyjmijmy teraz, że mamy dany n-elementowy podzbiór $S_n \subseteq K$ rozróżniający sumy. Na mocy udowodnionego stwierdzenia istnieje najwyżej 3^n liczb całkowitych x, dla których $S_n \cup \{x\}$ nie jest $(n+1)$-elementowym zbiorem rozróżniającym sumy. Zatem jeżeli $n<k+1$, to liczba 3^n jest mniejsza od liczby elementów zbioru K. W efekcie istnieje taka liczba $x \in K$, że $S_{n+1}=S_n \cup \{x\}$ jest $(n+1)$-elementowym podzbiorem rozróżniającym sumy.

Postępując w ten sposób skonstruujemy ciąg $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_k \subseteq S_{k+1}$ podzbiorów zbioru K rozróżniających sumy. Zbiór $S=S_{k+1}$ spełnia wówczas warunki zadania.

Zadanie **5.** Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami 1, 2, …, 30, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:

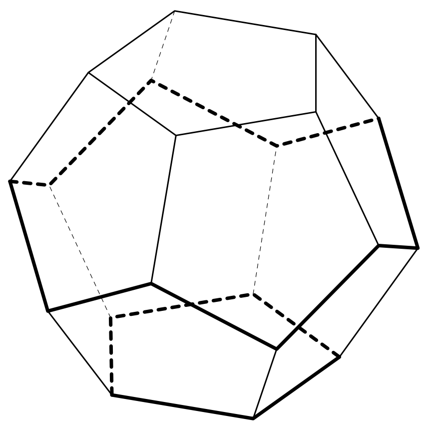
a) parzysta;

b) podzielna przez 4.

Rozwiązanie

a) Dwunastościan foremny składa się z dolnej podstawy i pięciu ścian do niej przyległych oraz górnej podstawy i pięciu ścian do niej przyległych. Istnieje 10 krawędzi, których żaden koniec nie należy do podstaw; krawędzie te tworzą drogę zamkniętą o długości 10.

Pomalujmy na czarno krawędzie tworzące tę właśnie drogę oraz krawędzie dolnej podstawy (na rys. 2 wymienione krawędzie są pogrubione). Łącznie otrzymujemy w ten sposób 15 czarnych krawędzi. Ponadto z każdego wierzchołka górnej podstawy nie wychodzą żadne czarne krawędzie, a z dowolnego innego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie czarne krawędzie.



rys. 2

Ponumerujmy teraz w dowolny sposób czarne krawędzie liczbami nieparzystymi 1, 3, …, 29, zaś pozostałe krawędzie — w dowolny sposób liczbami parzystymi 2, 4, …, 30. Wówczas z każdego wierzchołka wychodzi parzysta liczba krawędzi ponumerowanych liczbami nieparzystymi. Stąd suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka jest parzysta.

b) Przypuśćmy, że krawędzie danego dwunastościanu ponumerowano liczbami 1, 2, …, 30. Wpiszmy w każdym wierzchołku dwunastościanu sumę numerów trzech wychodzących zeń krawędzi. Każda krawędź ma dwa końce, więc suma S wszystkich liczb znajdujących się w wierzchołkach jest dwukrotnością sumy numerów wszystkich krawędzi: $S=2(1+2+\ldots+30)=30\cdot 31$. Wobec tego suma S jest liczbą niepodzielną przez 4; to zaś oznacza, że nie we wszystkich wierzchołkach dwunastościanu wpisana jest liczba podzielna przez 4. Zatem nie istnieje ponumerowanie krawędzi o wymaganej własności.

Odpowiedź: a) Tak. b) Nie.

Zadanie **6.** Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}} \geqslant \sqrt{3}.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}} \geqslant \sqrt{3}\cdot\frac{a^4}{a^3+b^3+c^3}. \tag{1}$$

Nierówność ta jest kolejno równoważna nierównościom:

$$a^3(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^4\sqrt{3(b^4+b^2c^2+c^4)},$$

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a\sqrt{3(b^4+b^2c^2+c^4)},$$

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geqslant 3a^2(b^4+b^2c^2+c^4),$$

i w efekcie zależność (1) jest równoważna zależności

$$a^6+b^6+c^6+2a^3b^3+2a^3c^3+2b^3c^3 \geqslant 3a^2b^4+3a^2c^4+3a^2b^2c^2. \tag{2}$$

Stosując trzykrotnie nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$b^6+a^3b^3+a^3b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{b^6(a^3b^3)(a^3b^3)} = 3a^2b^4,$$

$$c^6+a^3c^3+a^3c^3 \geqslant 3\sqrt[3]{c^6(a^3c^3)(a^3c^3)} = 3a^2c^4,$$

$$a^6+b^3c^3+b^3c^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^6(b^3c^3)(b^3c^3)} = 3a^2b^2c^2.$$

Sumując stronami trzy powyższe nierówności uzyskujemy nierówność (2), a więc i równoważną z nią nierówność (1).

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{b^3}{\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}} \geqslant \sqrt{3}\cdot\frac{b^4}{a^3+b^3+c^3}, \tag{3}$$

$$\frac{c^3}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}} \geqslant \sqrt{3}\cdot\frac{c^4}{a^3+b^3+c^3}. \tag{4}$$

Dodając stronami zależności (1), (3) i (4) oraz korzystając z danego w treści zadania warunku $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3$ uzyskujemy tezę.

Zadanie **7.** Znaleźć wszystkie takie pary (a,b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba b^2+ab+4 jest podzielna przez liczbę a^2+ab+4.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że para (a,b) spełnia warunki zadania. Wówczas prawdziwa jest nierówność $b^2+ab+4 \geqslant a^2+ab+4$ i na mocy założenia $a \neq b$ dostajemy $a<b$. Ponadto liczba

$$b(a^2+ab+4)-a(b^2+ab+4)=4b-4a$$

jest podzielna przez a^2+ab+4. Jak stwierdziliśmy wcześniej, prawa strona powyższej równości jest liczbą dodatnią. W takim razie $4b-4a \geqslant a^2+ab+4$ lub równoważnie $(4-a)b \geqslant (a+2)^2$. Wobec tego $(4-a)b$ jest liczbą dodatnią, skąd uzyskujemy $a<4$. Pozostaje więc rozpatrzyć wartości $a=1,2,3$.

1. $a=1$. Zatem liczba b^2+b+4 ma być podzielna przez $b+5$. Mamy

$$b^2+b+4=(b+5)(b-4)+24,$$

czyli żądana podzielność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 24 jest podzielna przez $b+5$. Stąd $b+5 \in \{6,8,12,14\}$, co daje $b \in \{3,7,19\}$; wartość $b=1$ odrzucamy ze względu na wymaganie $a \neq b$.

2. $a=2$. Zatem liczba b^2+2b+4 ma być podzielna przez $2b+8$. Liczba b^2+2b+4 musi więc być parzysta, czyli także b jest liczbą parzystą. Ponadto

$$b^2+2b+4=(b+4)(b-2)+12=(2b+8)\cdot\tfrac{1}{2}(b-2)+12,$$

przy czym liczba $\frac{1}{2}(b-2)$ jest całkowita. Wobec tego rozpatrywana podzielność ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $2b+8$ jest parzystym dzielnikiem liczby 12 większym od 8, a więc $2b+8=12$. Stąd $b=2$, lecz tę wartość musimy odrzucić, gdyż $a \neq b$.

3. $a=3$. Zatem liczba b^2+3b+4 ma być podzielna przez $3b+13$. Mamy

$$3(b^2+3b+4)=3b^2+9b+12=b(3b+13)-(4b-12),$$

i w rezultacie liczba $4b-12$ musi być podzielna przez $3b+13$. Wiemy jednak, że $b>a$, skąd $4b-12>0$; ponadto oczywiście $4b-12<2(3b+13)$. Musi więc być $4b-12=3b+13$, co daje wartość $b=25$. Pozostaje sprawdzić, że liczba $25^2+3\cdot 25+4=704=8\cdot 88$ istotnie jest podzielna przez $3\cdot 25+13=88$.

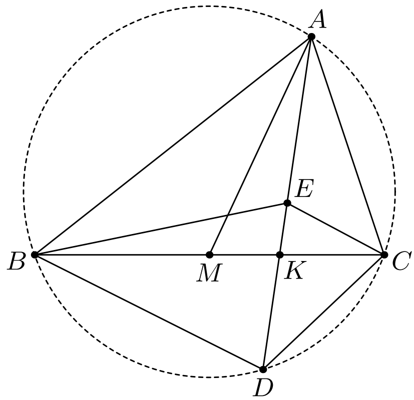
Odpowiedź: Szukanymi parami (a,b) są: $(1,3)$, $(1,7)$, $(1,19)$, $(3,25)$.

Zadanie **8.** Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM=\sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E, że $\sphericalangle BEK=\sphericalangle BAC$. Dowieść, że

$$\sphericalangle KEC=\sphericalangle BAC.$$

Rozwiązanie

Niech półprosta $AK^{\rightarrow}$ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie D (rys. 3).



rys. 3

Mamy wówczas $\sphericalangle MBA = \sphericalangle CDA$ oraz $\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAC$, zatem trójkąty ABM i ADC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Stąd $\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AD}{DC}$, czyli

(1) $$AB \cdot DC = AD \cdot BM.$$

Analogicznie $\sphericalangle MCA = \sphericalangle BDA$ i $\sphericalangle MAC = \sphericalangle BAD$, skąd uzyskujemy podobieństwo trójkątów ABD i AMC, co daje

(2) $$AD \cdot MC = AC \cdot BD.$$

Punkt M jest środkiem boku BC, więc $BM = MC$; z zależności (1) i (2) wynika teraz, że

(3) $$AB \cdot DC = AC \cdot BD.$$

Zauważmy dalej, że na mocy założeń zadania mamy $\sphericalangle BED = \sphericalangle BAC$; ponadto $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BCA$ i wobec tego trójkąty BED i BAC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). W efekcie $\dfrac{BD}{DE} = \dfrac{BC}{CA}$ i stosując równość (3) dostajemy

$$DE \cdot BC = BD \cdot CA = AB \cdot DC,$$

co prowadzi do wniosku, że

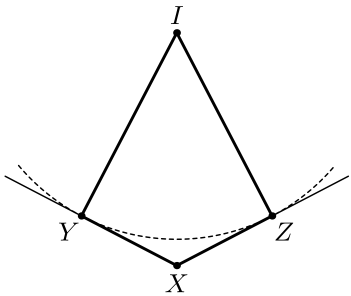
(4) $$\frac{CD}{DE} = \frac{CB}{BA}.$$

Ponieważ zaś $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$, więc zależność (4) pociąga za sobą podobieństwo trójkątów CDE i CBA (cecha *kąt-bok-kąt*), z którego wynika teza.

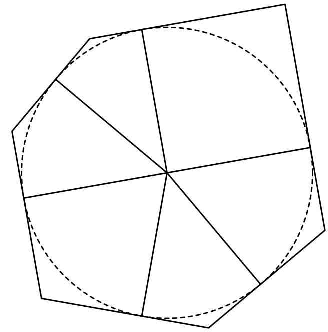
Zadanie **9.** Wykazać, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na 7 deltoidów.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli okrąg o środku w punkcie I wpisany w kąt o wierzchołku X jest styczny do jego ramion w punktach Y i Z (rys. 4), to czworokąt $IYXZ$ jest deltoidem. Z tego spostrzeżenia wprost wynika, że dowolny n-kąt opisany na okręgu można rozciąć na n deltoidów (rys. 5).

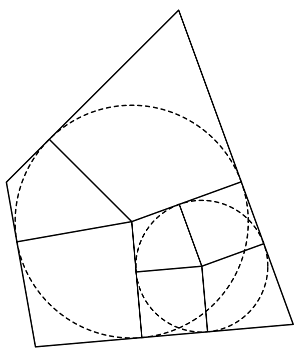


rys. 4

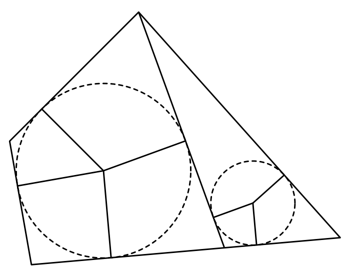


rys. 5

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Jeżeli w dany czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to czworokąt ten można podzielić na 4 deltoidy. Ponadto w każdy deltoid można wpisać okrąg, a więc jeden z tych deltoidów możemy rozciąć na 4 mniejsze deltoidy. W rezultacie otrzymujemy podział wyjściowego czworokąta na 7 deltoidów (rys. 6).



rys. 6



rys. 7

Jeżeli natomiast w rozpatrywany czworokąt wypukły nie można wpisać okręgu, to istnieje okrąg styczny do trzech jego boków i nie mający punktów wspólnych z czwartym bokiem (okrąg taki otrzymujemy wpisując w dowolnie wybrany kąt wewnętrzny czworokąta mały okrąg i powiekszając go aż do uzyskania styczności z trzecim bokiem). Wówczas dany czworokąt można rozbić na opisany na tym okręgu czworokąt, który daje się podzielić na 4 deltoidy, oraz trójkąt, który daje się podzielić na 3 deltoidy (rys. 7). W ten sposób wyjściowy czworokąt został rozcięty na 7 deltoidów.

Zadanie **10.** Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze p i q. Dowieść, że liczba $2^{pq}-1$ ma co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie

Będziemy wielokrotnie korzystać z tożsamości

$$\frac{a^n-1}{a-1}=1+a+a^2+\ldots+a^{n-2}+a^{n-1} \tag{1}$$

prawdziwej dla dowolnej liczby $a\neq 1$ i dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

Z tożsamości tej zastosowanej raz dla $a=2^p$ i $n=q$, a raz dla $a=2^q$ i $n=p$ wynika, że liczba $2^{pq}-1$ jest podzielna przez liczby 2^p-1 i 2^q-1.

Wykażemy teraz, że liczby 2^p-1 i 2^q-1 są względnie pierwsze. Przypuśćmy bowiem, że mają one wspólny dzielnik całkowity $d>1$; jest on oczywiście liczbą nieparzystą. Niech k oznacza najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, dla której liczba 2^k-1 jest podzielna przez d. Podzielmy liczby p i q przez k otrzymując odpowiednio ilorazy n_p i n_q oraz reszty r_p i r_q. Innymi słowy,

$$p=kn_p+r_p \quad \text{oraz} \quad q=kn_q+r_q, \qquad \text{gdzie } 0\leqslant r_p,r_q<k.$$

Tożsamość (1) dla $a=2^k$ i $n=n_p$ implikuje podzielność liczby $a^n-1=2^{kn_p}-1$ przez $a-1=2^k-1$, a więc podzielność liczby $2^{kn_p}-1$ przez d. Różnica

$$(2^p-1)-(2^{kn_p}-1)=2^p-2^{kn_p}=2^{kn_p+r_p}-2^{kn_p}=2^{kn_p}(2^{r_p}-1)$$

jest wobec tego podzielna przez liczbę nieparzystą d, zatem i liczba $2^{r_p}-1$ jest podzielna przez d. Z określenia liczby k i nierówności $r_p<k$ dostajemy $r_p=0$, czyli liczba p jest podzielna przez k. Analogicznie liczba q jest podzielna przez k. Jednak p i q są różnymi liczbami pierwszymi, skąd $k=1$ i liczba $2^k-1=1$ jest podzielna przez d, wbrew nierówności $d>1$.

Skoro 2^p-1 i 2^q-1 są względnie pierwszymi dzielnikami liczby $2^{pq}-1$, więc istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, że

$$2^{pq}-1=(2^p-1)(2^q-1)m. \tag{2}$$

Przy tym $m>1$, gdyż liczba $2^{pq}-1$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4, natomiast iloczyn $(2^p-1)(2^q-1)$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4.

Zbadamy następnie, jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby 2^p-1 i m. Przypuśćmy, że d jest takim dzielnikiem; zatem d jest także wspólnym dzielnikiem liczb 2^p-1 i

$$(2^q-1)m=\frac{2^{pq}-1}{2^p-1}=1+2^p+2^{2p}+\ldots+2^{(q-2)p}+2^{(q-1)p}, \tag{3}$$

gdzie ponownie wykorzystaliśmy tożsamość (1). Podzielność liczby 2^p-1 przez d oznacza, że prawa strona zależności (3) jest sumą q składników, z których każdy daje resztę 1 z dzielenia przez d. Zatem liczba $(2^q-1)m$ daje z dzielenia przez d tę samą resztę, co liczba pierwsza q, z drugiej zaś strony liczba $(2^q-1)m$ jest podzielna przez d. Wobec tego $d=1$ lub $d=q$.

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla wspólnych dzielników liczb 2^q-1 i m stwierdzamy, że

$$\mathrm{NWD}(2^p-1,m)\in\{1,q\} \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{NWD}(2^q-1,m)\in\{1,p\}. \tag{4}$$

W równości (2) po prawej stronie występują 3 czynniki, z których dwa pierwsze są względnie pierwsze. Jeżeli którykolwiek z tych dwóch czynników ma więcej niż jeden dzielnik pierwszy, to liczba $2^{pq}-1$ ma co najmniej 3 dzielniki pierwsze. Możemy więc w dalszej części rozwiązania przyjąć, że liczby 2^p-1 i 2^q-1 są potęgami liczb pierwszych. Ponadto z uwagi na symetrię wolno założyć, że $p>q$.

Udowodnimy, że liczba 2^p-1 nie jest podzielna przez q. Wśród $q+1$ liczb 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{q-1}, 2^q pewne dwie dają te same reszty z dzielenia przez q. Niech będą to 2^{ℓ_1} i 2^{ℓ_2}, gdzie $0\leqslant\ell_1<\ell_2\leqslant q$. Różnica

$$2^{\ell_2}-2^{\ell_1}=2^{\ell_1}(2^{\ell_2-\ell_1}-1)$$

jest wówczas podzielna przez q, więc przez q dzieli się także liczba $2^\ell-1$, gdzie $\ell=\ell_2-\ell_1$. W efekcie liczby 2^p-1 i $2^\ell-1$ są podzielne przez q. Stosując rozumowanie takie jak w trzecim akapicie rozwiązania stwierdzamy, że istnieje taki wspólny dzielnik h liczb p i ℓ, że liczba 2^h-1 jest podzielna przez q. Jednak p jest liczbą pierwszą oraz $\ell\leqslant q<p$, czyli jedynym takim dzielnikiem jest $h=1$. Stąd liczba 2^1-1 jest podzielna przez q i mamy sprzeczność.

Wobec tego liczba 2^p-1 jest potęgą liczby pierwszej różnej od q, zaś liczba 2^q-1 jest potęgą liczby pierwszej (być może równej p). W tej sytuacji z rozkładu (2) oraz z zależności (4) wynika, że liczba 2^p-1 jest względnie pierwsza zarówno z liczbą 2^q-1, jak i z liczbą m. Zatem liczba $2^{pq}-1$ może nie mieć 3 różnych dzielników pierwszych tylko wtedy, gdy 2^q-1 i m są potęgami liczby pierwszej p, a więc gdy

$$2^q-1=p^\alpha \qquad \text{oraz} \qquad m=p^\beta, \tag{5}$$

gdzie w myśl (4) przynajmniej jeden z wykładników α, β jest równy 1.

Niech najpierw $\alpha=1$, czyli $2^q=p+1$. Na mocy wzorów (2) i (1) mamy

$$(2^p-1)p^\beta=(2^p-1)m=\frac{2^{pq}-1}{2^q-1}=1+2^q+2^{2q}+\ldots+2^{(p-1)q}=$$
$$=1+(p+1)+(p+1)^2+\ldots+(p+1)^{p-1}=\frac{(p+1)^p-1}{p},$$

i stosując wzór dwumianowy dochodzimy do wniosku, że

$$(2^p-1)p^{\beta+1}=(p+1)^p-1=$$
$$=p^p+\binom{p}{1}p^{p-1}+\ldots+\binom{p}{p-3}p^3+\binom{p}{p-2}p^2+\binom{p}{p-1}p+1-1=$$
$$=p^p+\binom{p}{1}p^{p-1}+\ldots+\binom{p}{p-3}p^3+\binom{p}{p-2}p^2+p^2.$$

W otrzymanej liczbie wszystkie składniki z wyjątkiem ostatniego są podzielne przez p^3 — współczynnik $\binom{p}{p-2}=\frac{1}{2}p(p-1)$ jest bowiem podzielny przez liczbę pierwszą $p\geqslant 3$. W rezultacie liczba $(2^p-1)p^{\beta+1}$ jest podzielna przez p^2, ale nie przez p^3, co daje $\beta=1$.

Zatem w równościach (5) zawsze mamy $\beta = 1$ i w takim razie

$$m = p^\beta = p \leqslant p^\alpha = 2^q - 1.$$

Stąd jednak otrzymujemy

$$2^{pq-1} < 2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^q - 1)m \leqslant (2^p - 1)(2^q - 1)^2 < 2^p(2^q)^2 = 2^{p+2q}$$

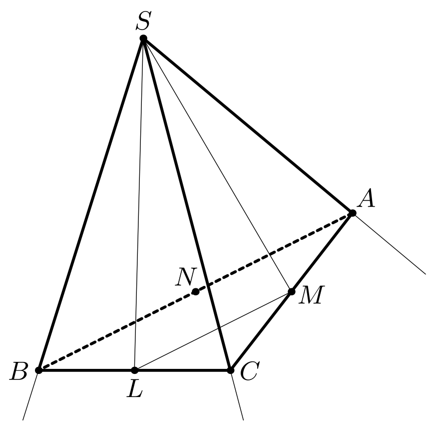
i wobec tego $pq - 1 < p + 2q$, czyli $p(q-1) < 2q + 1$. Ta nierówność nie może jednak mieć miejsca dla różnych liczb całkowitych $p, q \geqslant 3$, gdyż wówczas $p(q-1) < 2q+1 < 2q+1+(2q-5) = 4(q-1)$ i musiałoby być $p = 3$, lecz wtedy dostajemy $3(q-1) < 2q+1$, co daje $q < 4$.

Uzyskana sprzeczność wskazuje, że równości (5) nie mogą być jednocześnie prawdziwe; to zaś, jak stwierdziliśmy wcześniej, kończy rozwiązanie.

Zadanie **11.** W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

Rozwiązanie

Niech S będzie wspólnym wierzchołkiem danych kątów płaskich. Na trzech ramionach tych kątów płaskich wybierzmy takie punkty A, B i C, że odcinki SA, SB i SC mają jednakową długość (rys. 8), którą oznaczymy d. Przyjmijmy ponadto oznaczenia: $a = \frac{1}{2} \cdot BC$, $b = \frac{1}{2} \cdot CA$, $c = \frac{1}{2} \cdot AB$.



rys. 8

Niech L, M i N oznaczają odpowiednio środki odcinków BC, CA i AB. Trójkąty SBC, SCA i SAB są równoramienne, zatem półproste $SL^{\rightarrow}$, $SM^{\rightarrow}$ i $SN^{\rightarrow}$ są odpowiednio dwusiecznymi kątów płaskich BSC, CSA i ASB.

Znajdziemy warunek konieczny i dostateczny na to, by półproste $SL^{\rightarrow}$ i $SM^{\rightarrow}$ były prostopadłe. Na mocy twierdzenia Pitagorasa prostopadłość ta jest równoważna równości

(1) $$SL^2 + SM^2 = LM^2.$$

Z drugiej jednak strony, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa daje $LM=\frac{1}{2}AB=c$, zaś twierdzenie Pitagorasa prowadzi do wniosku, że

$$SL^2=SC^2-CL^2=d^2-a^2 \qquad \text{oraz} \qquad SM^2=SC^2-CM^2=d^2-b^2.$$

W rezultacie warunek (1) jest równoważny równości

$$2d^2=a^2+b^2+c^2. \tag{2}$$

Analogicznie dowodzimy, że każda z prostopadłości $SM^{\rightarrow}\perp SN^{\rightarrow}$ oraz $SN^{\rightarrow}\perp SL^{\rightarrow}$ jest równoważna warunkowi (2). Wynika stąd teza zadania.

Zadanie **12.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie

$$a*b=\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}, \tag{1}$$

gdzie a i b są dowolnymi liczbami dodatnimi. Wówczas daną w treści zadania równość możemy zapisać w postaci

$$f(x*y)=\frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2}$$

Stosując trzykrotnie warunek (2) widzimy, że dla dowolnych liczb dodatnich x_1, x_2, x_3, x_4 prawdziwa jest zależność

$$f((x_1*x_2)*(x_3*x_4))=\frac{f(x_1*x_2)+f(x_3*x_4)}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

Prawa strona powyższej zależności nie zmienia się pod wpływem przestawienia symboli x_1, x_2, x_3, x_4. Wobec tego dokonując permutacji tych symboli po lewej stronie nie zmienimy jej wartości; w szczególności uzyskujemy

$$f((x_1*x_4)*(x_2*x_3))=f((x_1*x_2)*(x_3*x_4)). \tag{3}$$

Określmy teraz funkcje g i h wzorami

$$g(x)=(x^2*x)*(x*1) \quad \text{oraz} \quad h(x)=(x^2*1)*(x*x)$$

dla każdej liczby dodatniej $x>0$. Z definicji (1) wynika natychmiast, że dla dowolnej liczby $t>0$ mamy $ta*tb=t\cdot(a*b)$, skąd

$$tg(x)=(tx^2*tx)*(tx*t) \quad \text{oraz} \quad th(x)=(tx^2*t)*(tx*tx)$$

dla wszystkich liczb $t,x>0$. W takim razie stosując równość (3) do ciągu $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(tx^2,tx,tx,t)$ otrzymujemy związek

$$f(tg(x))=f(th(x)) \qquad \text{dla } t,x>0. \tag{4}$$

Zauważmy, że $g(1)=h(1)=1$ oraz

$$g(2)=(4*2)*(2*1)=\sqrt{\tfrac{28}{3}}*\sqrt{\tfrac{7}{3}}=\tfrac{7}{3},$$
$$h(2)=(4*1)*(2*2)=\sqrt{7}*2=\sqrt{\tfrac{1}{3}(11+2\sqrt{7})}.$$

Nietrudno sprawdzić, że $g(2)>h(2)$; rzeczywiście, przekształcając równoważnie tę nierówność dostajemy kolejno $\frac{49}{9}>\frac{1}{3}(11+2\sqrt{7})$, $49>33+6\sqrt{7}$, $8>3\sqrt{7}$, $64>63$. Zatem

$$\frac{g(1)}{h(1)}=1 \qquad \text{oraz} \qquad \lambda=\frac{g(2)}{h(2)}>1.$$

Ponieważ $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ jest funkcją ciągłą zmiennej x, więc każda liczba rzeczywista z przedziału $\langle 1;\lambda\rangle$ jest wartością tego ilorazu dla pewnej liczby $x\in\langle 1;2\rangle$.

Niech a będzie liczbą dodatnią i rozpatrzmy dowolną liczbę $b\in\langle a;\lambda a\rangle$. Wówczas $\dfrac{b}{a}\in\langle 1;\lambda\rangle$ i na mocy konkluzji poprzedniego akapitu mamy

$$\frac{b}{a}=\frac{g(z)}{h(z)}$$

dla pewnej liczby rzeczywistej $z\in\langle 1;2\rangle$; stąd zaś, w myśl równości (4) zastosowanej dla $t=\dfrac{a}{h(z)}$ i $x=z$, otrzymujemy

$$f(b)=f\left(a\cdot\frac{b}{a}\right)=f\left(a\cdot\frac{g(z)}{h(z)}\right)=f\left(\frac{a}{h(z)}\cdot g(z)\right)=f\left(\frac{a}{h(z)}\cdot h(z)\right)=f(a).$$

To oznacza, że funkcja f jest stała na przedziale $\langle a;\lambda a\rangle$.

Jeżeli wreszcie a i b są dowolnymi liczbami dodatnimi, przy czym $a\leqslant b$, to dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\mu=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\leqslant\lambda.$$

Wobec tego funkcja f jest stała na każdym z przedziałów

$$\langle a;\mu a\rangle,\quad \langle\mu a;\mu^2a\rangle,\quad \langle\mu^2a;\mu^3a\rangle,\quad \ldots,\quad \langle\mu^{n-1}a;\mu^na\rangle,$$

skąd wynika, że

$$f(a)=f(\mu a)=f(\mu^2a)=\ldots=f(\mu^{n-1}a)=f(\mu^na)=f\left(\frac{b}{a}\cdot a\right)=f(b).$$

Jednak liczby a i b wybraliśmy dowolnie, czyli f musi być funkcją stałą.

Pozostaje stwierdzić, że funkcje stałe mają wymaganą własność.

Odpowiedź: Szukanymi funkcjami są wszystkie funkcje stałe.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`