LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

21 kwietnia 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dana jest liczba całkowita $n>1$ i zbiór $S\subseteq\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ mający więcej niż $\frac{3}{4}n$ elementów. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite a, b, c, że reszty z dzielenia przez n liczb

$$a,\quad b,\quad c,\quad a+b,\quad a+c,\quad b+c,\quad a+b+c$$

należą do zbioru S.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez k liczbę elementów zbioru S; mamy więc $k>\frac{3}{4}n$.

Wybierzmy najpierw dowolną liczbę $a\in S$. Zauważmy następnie, że dla różnych liczb $x\in S$ otrzymujemy różne reszty z dzielenia liczby $a+x$ przez n, gdyż zbiór S jest zawarty w przedziale o długości mniejszej niż n. Zbiór S składa się z k reszt z dzielenia przez n, więc istnieje najwyżej $n-k$ takich wartości $x\in S$, że reszta z dzielenia liczby $a+x$ przez n nie należy do zbioru S.

Z warunku $k>\frac{3}{4}n$ wynika, że $n-k<k$. W rezultacie istnieje taka liczba $b\in S$, że reszta z dzielenia liczby $a+b$ przez n należy do zbioru S. Wybierzmy więc i ustalmy taką liczbę b.

Analogicznie dowodzimy, że:

- istnieje najwyżej $n-k$ wartości $y\in S$, dla których reszta z dzielenia liczby $a+y$ przez n nie należy do zbioru S;
- istnieje najwyżej $n-k$ wartości $y\in S$, dla których reszta z dzielenia liczby $b+y$ przez n nie należy do zbioru S;
- istnieje najwyżej $n-k$ wartości $y\in S$, dla których reszta z dzielenia liczby $a+b+y$ przez n nie należy do zbioru S.

Zatem istnieje najwyżej $3(n-k)$ takich wartości $y\in S$, że reszta z dzielenia przynajmniej jednej z liczb $a+y$, $b+y$, $a+b+y$ przez n nie należy do zbioru S.

Nierówność $k>\frac{3}{4}n$ daje $3(n-k)<k$, więc możemy wybrać taką liczbę $c\in S$, że reszty z dzielenia liczb $a+c$, $b+c$, $a+b+c$ przez n należą do zbioru S.

Tak otrzymane liczby a, b, c spełniają oczywiście warunki zadania.

Zadanie **2.** Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość

$$a^3+4a^2b=4a^2+b^4.$$

Udowodnić, że liczba $\sqrt{a}-1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie

Z zależności danej w treści zadania otrzymujemy

$$a(a+2b)^2=a^3+4a^2b+4ab^2=4a^2+b^4+4ab^2=(2a+b^2)^2,$$

skąd wniosek, że

$$a=\frac{(2a+b^2)^2}{(a+2b)^2}, \qquad \text{czyli} \qquad \sqrt{a}=\frac{2a+b^2}{a+2b}.$$

Zatem $\sqrt{a}$ jest liczbą wymierną. Ponadto liczba $x=b$ jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego

$$x^2-2\sqrt{a}x+2a-a\sqrt{a}=0.$$

Jednocześnie współczynniki tego trójmianu są liczbami wymiernymi i wobec tego jego wyróżnik, ktory wynosi

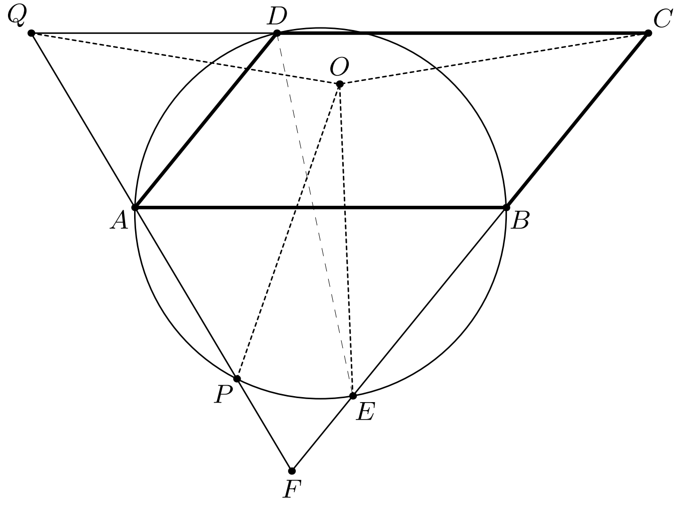
$$\Delta=(2\sqrt{a})^2-4(2a-a\sqrt{a})=4a(\sqrt{a}-1),$$

jest kwadratem liczby wymiernej. Jest nim więc także liczba $\frac{\Delta}{(2\sqrt{a})^2}=\sqrt{a}-1$.

Zadanie **3.** Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ. Wykazać, że jeśli $D\neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.

Rozwiązanie

Niech okrąg przechodzący przez punkty A, P, B, D przecina po raz drugi prostą BC w punkcie E (w przypadku styczności przyjmujemy $E=B$) oraz niech proste AP i BC przecinają się w punkcie F (rys. 1). Z założenia $\sphericalangle DAB<90^\circ$ wynika, że punkty E i F leżą wewnątrz półprostej $\overrightarrow{CB}$.



rys. 1

Punkty A, P, E, B leżą na jednym okręgu, więc

(1) $$FP\cdot FA=FE\cdot FB.$$

Z drugiej strony, twierdzenie Talesa zastosowane do kąta AFB przeciętego prostymi równoległymi AB i QC daje

$$\frac{FA}{FQ} = \frac{FB}{FC}. \tag{2}$$

Łącząc zależności (1) i (2) stwierdzamy, że

$$FP \cdot FQ = FE \cdot FC. \tag{3}$$

Ponadto punkty F, E, P bądź to pokrywają się, bądź są różne i punkt F leży na zewnątrz obu odcinków PQ i EC (jeżeli punkt P leży po tej samej stronie prostej BC, co odcinek AD) albo wewnątrz obu tych odcinków (gdy P leży po przeciwnej stronie prostej BC). We wszystkich tych przypadkach równość (3) wskazuje, że punkty P, Q, E, C leżą na jednym okręgu, którego środkiem — w myśl warunków zadania — jest punkt O. Wobec tego

$$OE = OC. \tag{4}$$

Jednocześnie trapez o podstawach AD i BE jako wpisany w okrąg jest trapezem równoramiennym, zatem odcinki AB i DE, będące jego dwiema przekątnymi albo dwoma ramionami, mają równe długości. Stąd

$$DE = DC. \tag{5}$$

Równości (4) i (5) oznaczają, że punkty D i O leżą na symetralnej odcinka EC, która jest oczywiście prostopadła do prostej AD. To kończy rozwiązanie.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

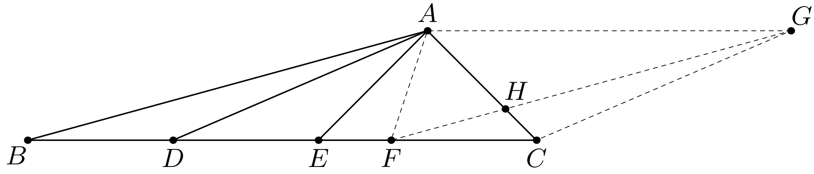
22 kwietnia 2010 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Wewnątrz boku BC trójkąta ABC leżą różne punkty D i E, przy czym $BD < BE$. Niech p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio obwody trójkątów ABC i ADE. Udowodnić, że

$$p_1 > p_2 + 2 \cdot \min\{BD, EC\}.$$

Rozwiązanie

Niech F będzie takim punktem odcinka BC, że $CF = BD$ (rys. 2). Uzupełnijmy trójkąt ABF do równoległoboku $ABFG$; wówczas czworokąt $ADCG$ także jest równoległobokiem.



rys. 2

Niech H oznacza punkt przecięcia odcinków AC i FG. Stosując nierówność trójkąta do (być może zdegenerowanego do odcinka) trójkąta AEF oraz do trójkątów GCH i AFH otrzymujemy

$$AE \leqslant AF + EF, \qquad GC < GH + CH, \qquad AF < HA + HF.$$

Wobec tego

$$AD + AE = GC + AE \leqslant GC + AF + EF < GH + CH + HA + HF + EF =$$
$$= AC + GF + EF = AC + AB + EF.$$

Ponieważ $|x - y| = x + y - 2 \cdot \min\{x, y\}$ oraz $EF = |BD - CE|$, więc dostajemy

$$AD + AE < AC + AB + BD + CE - 2 \cdot \min\{BD, CE\}.$$

Dodając do obu stron powyższej nierówności wielkość DE stwierdzamy, że $p_2 < p_1 - 2 \cdot \min\{BD, CE\}$, co należało wykazać.

Zadanie **5.** Liczba pierwsza $p > 3$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Niech

$$a_k = k^2 + k + 1 \qquad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

Wykazać, że iloczyn $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}$ daje resztę 3 z dzielenia przez p.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że liczby 0^3, 1^3, 2^3, $\ldots$, $(p-1)^3$ dają różne reszty z dzielenia przez p.

Przypuśćmy bowiem, że dla pewnych $m,n\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ spełniona jest zależność $m^3\equiv n^3\pmod p$. Z założenia mamy $p=3\ell+2$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ, a więc

$$m^{2p-1}=m^{6\ell+3}=(m^3)^{2\ell+1}\equiv(n^3)^{2\ell+1}=n^{6\ell+3}=n^{2p-1}\pmod p. \tag{1}$$

Z drugiej strony, małe twierdzenie Fermata orzeka, że $m^p\equiv m\pmod p$ oraz $n^p\equiv n\pmod p$, co daje

$$m^{2p-1}=m^p\cdot m^{p-1}\equiv m\cdot m^{p-1}=m^p\equiv m\pmod p$$

i podobnie $n^{2p-1}\equiv n\pmod p$. Wraz z równością (1) prowadzi to do wniosku, że $m\equiv n\pmod p$, czyli $m=n$. To dowodzi początkowego stwierdzenia.

Ponieważ liczby 0^3-1 i 1^3-1 dają odpowiednio reszty $p-1$ i 0 z dzielenia przez p, więc w szczególności wykazaliśmy, że ciąg reszt z dzielenia liczb

$$2^3-1,\quad 3^3-1,\quad 4^3-1,\quad \ldots,\quad (p-1)^3-1$$

przez p jest permutacją ciągu 1, 2, 3, …, $p-2$. Wobec tego

$$(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\ldots((p-1)^3-1)\equiv1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-2)=(p-2)!\pmod p. \tag{2}$$

Z drugiej strony, mamy $k^3-1=(k-1)a_k$ dla $k=2,3,4,\ldots,p-1$ i mnożąc te równości stronami dostajemy

$$(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\ldots((p-1)^3-1)=(p-2)!a_2a_3a_4\ldots a_{p-1}. \tag{3}$$

Łącząc zależności (2) i (3) widzimy, że $(p-2)!\equiv(p-2)!a_2a_3a_4\ldots a_{p-1}\pmod p$ i ponieważ liczba $(p-2)!$ nie jest podzielna przez liczbę pierwszą p, więc iloczyn $a_2a_3a_4\ldots a_{p-1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez p. A skoro mamy $a_1=3$, iloczyn $a_1a_2a_3\ldots a_{p-1}$ daje resztę 3 z dzielenia przez p.

Zadanie **6.** Dana jest liczba rzeczywista $C>1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, …, w którym $a_1=1$ i $a_2=2$, spełnia warunki

$$a_{mn}=a_ma_n \qquad \text{oraz} \qquad a_{m+n}\leqslant C(a_m+a_n)$$

dla $m,n=1,2,3,\ldots$. Dowieść, że

$$a_n=n \qquad \text{dla } n=1,2,3,\ldots.$$

Rozwiązanie

Wykażemy przede wszystkim, że

$$a_{m+n}\leqslant a_m+a_n \qquad \text{dla wszystkich } m,n=1,2,3,\ldots.$$

Niech S oznacza zbiór takich dodatnich liczb rzeczywistych d, że nierówność $a_{m+n}\leqslant d(a_m+a_n)$ jest spełniona dla dowolnych $m,n=1,2,3,\ldots$. W myśl warunków zadania jest to zbiór niepusty, gdyż należy doń liczba C.

Ponadto wraz z dowolną liczbą do zbioru S należą wszystkie liczby większe. Zbiór S jest zatem przedziałem domkniętym $\langle D;\infty)$ lub przedziałem otwartym $(D;\infty)$ dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej D. Ta druga możliwość jednak odpada. Oznacza ona bowiem, że dla każdej wartości $d>D$ nierówność $a_{m+n}\leqslant d(a_m+a_n)$ jest spełniona dla wszystkich $m,n=1,2,3,\ldots$.

Ustalając wskaźniki m i n widzimy, że nieostra nierówność $a_{m+n} \leqslant d(a_m+a_n)$ jest prawdziwa dla *każdej* wartości $d>D$. Jest ona więc prawdziwa również dla $d=D$. Wobec tego $a_{m+n} \leqslant D(a_m+a_n)$ i z uwagi na dowolność wskaźników m i n stwierdzamy, że $D \in S$.

Zatem zbiór S jest przedziałem domkniętym $\langle D;\infty)$.

Ponieważ $D \in S$, więc dla dowolnych $j,k,\ell=1,2,3,\ldots$ możemy napisać

$$a_{j+k+\ell} \leqslant D(a_j+a_{k+\ell}) \leqslant D(a_j+D(a_k+a_\ell)) = Da_j + D^2a_k + D^2a_\ell.$$

Dokonując cyklicznych przestawień symboli j, k, ℓ otrzymujemy dwie analogiczne nierówności. Sumując je wraz z powyższą uzyskujemy

$$a_{j+k+\ell} \leqslant (\tfrac{2}{3}D^2+\tfrac{1}{3}D)(a_j+a_k+a_\ell).$$

Przyjmijmy teraz $j=m^2$, $k=2mn$, $\ell=n^2$; otrzymujemy wówczas

$$a_{(m+n)^2} \leqslant (\tfrac{2}{3}D^2+\tfrac{1}{3}D)(a_{m^2}+a_{2mn}+a_{n^2}).$$

Z warunków zadania wynika, że lewa strona powyższej nierówności wynosi a_{m+n}^2, natomiast drugi nawias po prawej stronie można zapisać w postaci $a_ma_m+a_2a_ma_n+a_na_n = a_m^2+2a_ma_n+a_n^2 = (a_m+a_n)^2$. Zatem

$$a_{m+n} \leqslant \sqrt{\tfrac{2}{3}D^2+\tfrac{1}{3}D}\,(a_m+a_n)$$

dla $m,n=1,2,3,\ldots$, skąd dostajemy relację $\sqrt{\frac{2}{3}D^2+\frac{1}{3}D} \in S$. Na mocy określenia liczby D oznacza to, że $\sqrt{\frac{2}{3}D^2+\frac{1}{3}D} \geqslant D$, co daje $D \geqslant D^2$ i $D \leqslant 1$.

Udowodniliśmy tym samym, że

$$a_{m+n} \leqslant a_m+a_n \qquad \text{dla } m,n=1,2,3,\ldots. \tag{1}$$

Nierówność (1) wskazuje w szczególności, że $a_{m+1} \leqslant a_m+1$ dla $m=1,2,3,\ldots$, skąd stosując indukcję dostajemy $a_m \leqslant m$ dla każdego m.

Na koniec rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą dodatnią n i niech k będzie taką liczbą całkowitą, że $2^k>n$. Z zależności $a_2=2$ i $a_{\ell m}=a_\ell a_m$ dla wszystkich $\ell,m=1,2,3,\ldots$ wynika, że $a_{2^k}=2^k$. W rezultacie na mocy (1) otrzymujemy zależność

$$2^k = a_{2^k} = a_{n+(2^k-n)} \leqslant a_n + a_{2^k-n} \leqslant n+(2^k-n) = 2^k.$$

Zatem w powyższych nierównościach muszą w istocie mieć miejsce równości, a to dowodzi, że $a_n=n$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`