LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2-(y+z+yz)x+(y+z)yz=0 \\ y^2-(z+x+zx)y+(z+x)zx=0 \\ z^2-(x+y+xy)z+(x+y)xy=0 \end{cases}$$

2. Punkty A', B', C' są odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD, punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD, zaś punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

3. Dodatnie liczby całkowite k i n spełniają nierówność $k>n!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, ..., p_n będące odpowiednio dzielnikami liczb $k+1$, $k+2$, $k+3$, ..., $k+n$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2010 r. (drugi dzień zawodów)

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x)-y)+f(x+y)=0.$$

(*Uwaga:* Funkcja monotoniczna to funkcja niemalejąca lub nierosnąca.)

6. Dany jest n-elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n \geqslant 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n-1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.