LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć największą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci x^3+2y^2 dla pewnych liczb całkowitych x, y.

2. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$\sphericalangle ABD=\sphericalangle ACE, \qquad \sphericalangle ACB=\sphericalangle ACD,$$
$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle ADE, \qquad \sphericalangle ADB=\sphericalangle AEC.$$

Odcinki BD i CE przecinają się w punkcie S. Dowieść, że proste AS i CD są prostopadłe.

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(f(x)-y)=f(x)+f(f(y)-f(-x))+x.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2008 r. (drugi dzień zawodów)

4. W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: Wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną weń liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), zaś każdą z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1.

Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB tego trójkąta, przy czym $AD < BD$. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem prostej CD. Wykazać, że

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BD-AD}.$$

6. Dana jest liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 3. Udowodnić, że istnieje liczba m o następującej własności: Każda liczba całkowita nie mniejsza niż m jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.