LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

(10 września 2007 r. – 10 grudnia 2007 r.)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y \end{cases}$$

Rozwiązanie

Jeżeli trójka liczb (x,y,z) spełnia dany układ równań, to spełniają go również trójki liczb (y,z,x) i (z,x,y). Zatem bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że x jest najmniejszą wśród liczb x, y, z (pozostałe rozwiązania otrzymamy przez cykliczne przestawienie zmiennych).

Rozpatrzmy dwa przypadki.

1. $y \leqslant z$. Mamy więc $x \leqslant y \leqslant z$. Funkcja $f(t) = t^5$ jest ściśle rosnąca, zatem z drugiego i trzeciego równania danego układu otrzymujemy

$$5z^3 = y^5 + 4x \leqslant z^5 + 4y = 5x^3.$$

Funkcja $f(t) = t^3$ również jest ściśle rosnąca. Wobec tego powyższa nierówność implikuje, że $z \leqslant x$. W konsekwencji $x = y = z$. Stąd wynika, że rozwiązania danego układu równań w tym przypadku mają postać $x = y = z = t$, gdzie t jest rozwiązaniem równania $t^5 = 5t^3 - 4t$. To równanie jest równoważne równaniu

$$0 = t^5 - 5t^3 + 4t = t(t^4 - 5t^2 + 4t) = t(t^2 - 1)(t^2 - 4) = t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2),$$

które ma rozwiązania $t = -2, -1, 0, 1, 2$. Otrzymujemy więc 5 rozwiązań danego układu równań: $x = y = z \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2. $y > z$. W tym przypadku $x \leqslant z < y$. Rozumując podobnie jak poprzednio uzyskujemy

$$5y^3 = x^5 + 4z < z^5 + 4y = 5x^3,$$

czyli $y < x$. Zatem $x \leqslant z < y < x$, co nie może mieć miejsca.

Uwalniając się od założenia, że x jest najmniejszą wśród liczb x, y, z, widzimy, że jedynymi rozwiązaniami układu są rozwiązania otrzymane w przypadku **1.**

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y,z) danego układu równań są:

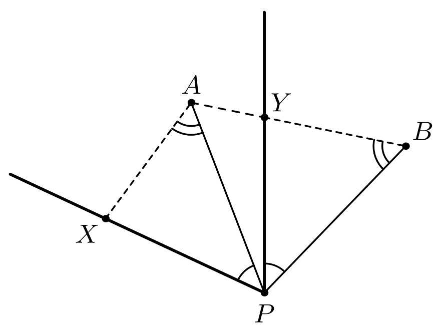
$$(-2,-2,-2), \quad (-1,-1,-1), \quad (0,0,0), \quad (1,1,1), \quad (2,2,2).$$

Zadanie **2.** Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P i punkt A leżący wewnątrz tego kąta. Punkty X i Y leżą na różnych ramionach tego kąta, przy czym $PX = PY$ oraz wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YAP.$$

Rozwiązanie

Niech B będzie takim punktem płaszczyzny, dla którego $PB = PA$ oraz $\sphericalangle BPA = \sphericalangle YPX$ (rys. 1).



rys. 1

Mamy wówczas $\sphericalangle BPY = \sphericalangle APX$, zatem trójkąty BPY i APX są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Stąd otrzymujemy równość $BY = AX$. Wartość wyrażenia $AX + AY = BY + AY$ jest najmniejsza, więc stosując nierówność trójkąta dochodzimy do wniosku, że punkt Y leży na odcinku AB. Ponieważ zaś trójkąt BPA jest równoramienny, uzyskujemy

$$\sphericalangle YAP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle YBP = \sphericalangle XAP,$$

co kończy rozwiązanie.

Zadanie **3.** Ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest określony przez warunki: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

(1) $$a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} \qquad \text{dla } n = 3, 4, 5, \ldots.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 2$, że liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$.

Rozwiązanie

Z danego w treści zadania warunku (1) wynika, że

$$a_{k+1}a_{k+2} = a_{k+1}(3a_k + 5a_{k+1}) = 3a_k a_{k+1} + 5a_{k+1}^2$$

dla $k \geqslant 2$. Wobec tego liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem liczby $5a_{k+1}^2$.

Zauważmy, że żaden wyraz ciągu a_1, a_2, a_3, $\ldots$ nie jest liczbą podzielną przez 5. W istocie, dla każdego wskaźnika $n \geqslant 3$ z równości $a_n - 3a_{n-1} = 5a_{n-2}$ wynika, że liczby a_n, a_{n-1} są obie podzielne przez 5 lub też żadna z nich.

Ponieważ jednak $a_1=1$, $a_2=2$ są liczbami niepodzielnymi przez 5, więc przez prostą indukcję otrzymujemy żądany wniosek. Analogicznie dowodzimy, że dla dowolnego $n\geqslant 3$ liczby a_n, a_{n-2} są obie podzielne albo obie niepodzielne przez 3, zatem w danym ciągu nie występują liczby podzielne przez 3.

Pozostaje więc zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita $k\geqslant 2$, że liczba a_{k+1}^2 jest podzielna przez a_k. Ponieważ $a_k\geqslant 2$, więc oznacza to, że liczby a_k i a_{k+1} muszą mieć wspólny dzielnik pierwszy p. Jak wykazaliśmy wyżej, liczba p jest różna od 3 i 5. Ponadto istnieje najmniejsza taka liczba całkowita dodatnia m, że liczby a_m i a_{m+1} są podzielne przez p. Mamy oczywiście $m\geqslant 2$, więc zachodzi równość $5a_{m-1}=a_{m+1}-3a_m$, z której wnioskujemy, że liczba a_{m-1} jest podzielna przez p. To jednak przeczy określeniu liczby m.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że taka liczba k nie istnieje.

Zadanie **4.** Dana jest liczba całkowita $n\geqslant 1$. Każdemu niepustemu podzbiorowi A zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1>a_2>\ldots>a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A, to

$$w(A)=a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{k+1}a_k. \tag{1}$$

Obliczyć sumę wszystkich 2^n-1 otrzymanych liczb $w(A)$.

Rozwiązanie

Sposób I

Dla $n=1$ rozważana suma jest równa 1. Przyjmijmy więc, że $n\geqslant 2$.

Niech B_1, B_2, ..., B_m będą wszystkimi niepustymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n-1\}$. Wówczas $m=2^{n-1}-1$ oraz

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_m,\ \{n\},\ B_1\cup\{n\},\ B_2\cup\{n\},\ \ldots,\ B_m\cup\{n\}$$

są wszystkimi niepustymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$.

Ustalmy wartość $i\in\{1,2,\ldots,m\}$. Niech $c_1>c_2>\ldots>c_k$ będą wszystkimi elementami zbioru B_i. Nietrudno spostrzec, że

$$w(B_i)=c_1-c_2+c_3-\ldots+(-1)^{k+1}c_k,$$
$$w(B_i\cup\{n\})=n-c_1+c_2-\ldots+(-1)^{k+2}c_k,$$

zatem

$$w(B_i)+w(B_i\cup\{n\})=n. \tag{2}$$

Wypisując równość (2) dla $i=1,2,\ldots,m$ i sumując stronami uzyskujemy

$$w(B_1)+w(B_1\cup\{n\})+\ldots+w(B_m)+w(B_m\cup\{n\})=m\cdot n.$$

Wobec tego suma, którą należy wyznaczyć, jest równa

$$w(\{n\})+m\cdot n=n+(2^{n-1}-1)\cdot n=\mathbf{n\cdot 2^{n-1}}.$$

Sposób II

Niech A_1, A_2, ..., A_m $(m=2^n-1)$ będą wszystkimi niepustymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Utwórzmy tabelę o m wierszach i n kolumnach. W każde pole tej tabeli wpisujemy liczbę zgodnie z następującą zasadą: Jeżeli $a_1>a_2>\ldots>a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A_j (gdzie $j=1,2,\ldots,m$), to w pole znajdujące się w j-tym wierszu oraz a_i-tej kolumnie wpisujemy liczbę $(-1)^{i+1}a_i$. W pozostałe pola tej tabeli wpisujemy zera.

Na mocy warunku (1) suma liczb znajdujących się w j-tym wierszu tabeli wynosi $w(A_j)$. To oznacza, że suma S, która należy obliczyć w zadaniu, jest równa sumie wszystkich liczb w tabeli. Zatem

$$S=k_1+k_2+\ldots+k_n, \tag{3}$$

gdzie k_i jest sumą liczb znajdujących się w i-tej kolumnie.

Dla każdego ze zbiorów A_1, A_2, ..., A_m liczba n jest bądź jego największym elementem, bądź też do niego nie należy. Ponadto liczba tych zbiorów, które zawierają liczbę n, jest równa liczbie podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n-1\}$, czyli liczbie 2^{n-1}. Wynika stąd, że w n-tej kolumnie tabeli znajduje się 2^{n-1} liczb n, a pozostałe liczby są zerami. Zatem $k_n=n\cdot 2^{n-1}$.

Wykażemy z kolei, że $k_1=k_2=\ldots=k_{n-1}=0$.

Ustalmy wartość $j\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. Każda liczba występująca w j-tej kolumnie jest równa 0, j albo $-j$. Musimy wykazać, że liczb j jest tyle samo, co liczb $-j$. Zauważmy, że w i-tym wierszu rozważanej kolumny znajduje się liczba j wtedy i tylko wtedy, gdy do zbioru A_i należy liczba j oraz parzysta liczba liczb większych od j (wybranych z $(n-j-1)$-elementowego zbioru $\{j+1,j+2,\ldots,n-1,n\}$); liczby mniejsze od j nie mają na to wpływu. Zatem liczba liczb j w j-tej kolumnie tabeli jest równa

$$2^{j-1}\cdot\left(\binom{n-j-1}{0}+\binom{n-j-1}{2}+\binom{n-j-1}{4}+\ldots\right), \tag{4}$$

przy czym ostatni składnik w powyższej sumie wynosi $\binom{n-j-1}{n-j-1}$ albo $\binom{n-j-1}{n-j-2}$ w zależności od parzystości liczby $n-j-1$. Podobnie dowodzimy, że liczba liczb $-j$ w j-tej kolumnie jest równa

$$2^{j-1}\cdot\left(\binom{n-j-1}{1}+\binom{n-j-1}{3}+\binom{n-j-1}{5}+\ldots\right). \tag{5}$$

Liczby (4) i (5) są równe, gdyż na mocy wzoru dwumianowego ich różnica wynosi $2^{j-1}\cdot(1-1)^{n-j-1}=0$. To kończy dowód równości $k_j=0$.

Z udowodnionych zależności otrzymujemy na mocy (3), że $\mathbf{S=n\cdot 2^{n-1}}$.

Zadanie **5.** Znaleźć wszystkie takie trójki liczb pierwszych (p,q,r), że liczby

$$pq+qr+rp \qquad \text{oraz} \qquad p^3+q^3+r^3-2pqr$$

są podzielne przez $p+q+r$.

Rozwiązanie

Niech liczby pierwsze p, q, r spełniają żądane warunki. Liczba

$$pq+qr+rp=p(p+q+r)-(p^2-qr)$$

jest podzielna przez $p+q+r$. Wobec tego liczby p^2-qr oraz $p(p^2-qr)=p^3-pqr$ są również podzielne przez $p+q+r$. Analogicznie dowodzimy, że liczby

$$q^3-pqr \quad \text{oraz} \quad r^3-pqr$$

są podzielne przez $p+q+r$. Sumując te trzy liczby dostajemy podzielność liczby $p^3+q^3+r^3-3pqr$ przez $p+q+r$. Zatem na mocy warunków zadania liczba $p+q+r$ jest dzielnikiem liczby pqr.

Liczby p, q, r są pierwsze, więc wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby pqr są: 1, p, q, r, pq, qr, rp, pqr (przy czym niektóre z nich mogą być równe). To oznacza, że $p+q+r$ musi być równe jednemu z tych dzielników. Cztery pierwsze dzielniki są mniejsze od $p+q+r$. Ponadto $pqr>p+q+r$, gdyż ze względu na nierówności $p,q,r\geqslant 2$ mamy

$$pqr\geqslant 4\cdot\max\{p,q,r\}>3\cdot\max\{p,q,r\}\geqslant p+q+r.$$

Zatem liczba $p+q+r$ jest równa pq, qr lub rp. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $p+q+r=pq$. Liczba $pq+qr+rp$ jest więc podzielna przez pq. Stąd liczba

$$pq(p+q+1)-(pq+qr+rp)=(p+q)(pq-r)=(p+q)^2$$

dzieli się przez pq. To oznacza, że liczba $p+q$ jest podzielna przez liczby pierwsze p i q. Musi więc być $p=q$. Ponadto $r=pq-p-q=p^2-2p=p(p-2)$ jest liczbą pierwszą. Wobec $p\geqslant 2$ iloczyn $p(p-2)$ może być liczbą pierwszą jedynie wtedy, gdy $p-2=1$. Ostatecznie mamy $p=q=3$ i $r=3\cdot 1=3$.

Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że otrzymane liczby spełniają warunki zadania.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem są liczby $(p,q,r)=(3,3,3)$.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu udowodniliśmy, że liczba $p^3+q^3+r^3-3pqr$ jest podzielna przez $p+q+r$. Można tę podzielność również wykazać przy użyciu tożsamości

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Zadanie **6.** Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2)\cdot W(x^3)=(W(x))^5. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy najpierw, że jedynymi wielomianami stałymi spełniającymi warunki zadania są $W(x)\equiv 0$ oraz $W(x)\equiv 1$. Przyjmijmy więc dalej, że wielomian $W(x)$ nie jest stały.

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest postaci $W(x)=cx^n$ dla pewnej liczby rzeczywistej $c\neq 0$ i liczby całkowitej $n\geqslant 1$, to w warunku (1) mamy

$$W(x^2)\cdot W(x^3)=c^2x^{5n}=(W(x))^5=c^5x^{5n},$$

co implikuje $c^2=c^5$ i $c=1$. Wobec tego wśród wielomianów rozważanej postaci tylko wielomiany $W(x)=x^n$ dla $n\geqslant 1$ spełniają warunki zadania.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy wielomian $W(x)$ jest sumą co najmniej dwóch niezerowych jednomianów. W takim razie możemy napisać

$$W(x)=a_nx^n+a_lx^l+G(x),$$

gdzie $n>l\geqslant 0$, $a_n\neq 0$, $a_l\neq 0$, a wielomian $G(x)$ jest wielomianem zerowym albo ma stopień najwyżej $l-1$. Zatem

$$\begin{aligned}W(x^2)\cdot W(x^3)&=(a_nx^{2n}+a_lx^{2l}+G(x^2))(a_nx^{3n}+a_lx^{3l}+G(x^3))=\\&=a_n^2x^{5n}+a_la_nx^{3n+2l}+a_la_nx^{2n+3l}+P(x),\end{aligned}$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n+3l-1$, oraz

$$(W(x))^5=(a_nx^n+a_lx^l+G(x))^5=a_n^5x^{5n}+5a_na_lx^{4n+l}+Q(x),$$

gdzie $Q(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $3n+2l$. Liczby $2n+3l$ i $3n+2l$ są mniejsze od $4n+l$. Wobec tego współczynnik przy potędze x^{4n+l} w wielomianie $W(x^2)\cdot W(x^3)$ jest równy zeru, a w wielomianie $(W(x))^5$ wynosi on $5a_na_l\neq 0$. Doszliśmy więc do sprzeczności.

Sposób II

Tak jak w sposobie I rozpatrujemy najpierw przypadek, gdy wielomian $W(x)$ jest stały. Otrzymujemy więc rozwiązania $W(x)\equiv 0$ i $W(x)\equiv 1$, a w dalszej części rozwiązania przyjmujemy, że wielomian $W(x)$ nie jest stały.

Podstawiając $x=0$ w zależności (1) otrzymujemy $(W(0))^2=(W(0))^5$. Zatem $W(0)=0$ albo $W(0)=1$.

Przypuśćmy najpierw, że $W(0)=1$. Wielomian $W(x)-1$ nie jest stały i jego pierwiastkiem jest liczba $x=0$. Wobec tego istnieją taka liczba całkowita dodatnia k oraz taki wielomian $G(x)$, że

$$W(x)=1+x^k\cdot G(x),\qquad \text{przy czym } G(0)\neq 0.$$

Korzystając ze wzoru dwumianowego obliczamy, że

$$W(x^2)\cdot W(x^3)=(1+x^{2k}G(x^2))(1+x^{3k}G(x^3))=1+x^{2k}P(x),$$

$$(W(x))^5=(1+x^kG(x))^5=1+5x^kG(x)+x^{2k}Q(x),$$

gdzie $P(x)$, $Q(x)$ są pewnymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Jeżeli więc równość (1) zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, to

$$x^{2k}(P(x)-Q(x))=x^k\cdot G(x) \tag{2}$$

dla wszystkich x. Jednakże wielomian występujący po lewej stronie równości (2) jest podzielny przez x^{2k}, a wielomian po prawej stronie zawiera niezerowy współczynnik $G(0)$ przy potędze x^k. Otrzymaliśmy więc sprzeczność.

Pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek $W(x) \not\equiv 0$, $W(0)=0$. Wówczas możemy napisać

$$W(x)=x^m \cdot G(x) \tag{3}$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m i wielomianu $G(x)$ spełniającego warunek $G(0)\neq 0$. Na mocy (1) i (3) mamy

$$x^{5m}\cdot G(x^2)\cdot G(x^3)=W(x^2)\cdot W(x^3)=(W(x))^5=x^{5m}\cdot(G(x))^5,$$

zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$G(x^2)\cdot G(x^3)=(G(x))^5.$$

Innymi słowy, wielomian $G(x)$ również spełnia warunki zadania. Ponieważ $G(0)\neq 0$, więc z poprzedniej części rozwiązania wnioskujemy, że $G(x)\equiv 1$. Wobec tego $W(x)=x^m$.

Pozostaje już tylko zauważyć, że każdy taki wielomian $W(x)$ spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: $W(x)\equiv 0$, $W(x)\equiv 1$ oraz $W(x)=x^n$ dla $n=1,2,3,\ldots$.

Zadanie **7.** W n-osobowym stowarzyszeniu działa 2^n-1 komisji (każdy niepusty zbiór członków stowarzyszenia tworzy komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: Jeżeli komisja C jest sumą $C=A\cup B$ dwóch komisji A i B, to przewodniczący komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A, B.

Wyznaczyć liczbę możliwych wyborów przewodniczących.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n!$.

Wskażemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między możliwymi wyborami przewodniczących komisji a sposobami przydzielenia członkom stowarzyszenia numerów 1, 2, …, n (przy czym różnym członkom przydzielone są różne numery). Tych ostatnich jest oczywiście tyle samo, ile permutacji zbioru n-elementowego, czyli $n!$.

Przypuśćmy więc, że w każdej komisji wybrano przewodniczącego zgodnie z założeniami zadania. Przypisujemy członkom stowarzyszenia numery indukcyjnie w następujący sposób:

- Numer 1 otrzymuje przewodniczący komisji, w skład której wchodzą wszyscy członkowie stowarzyszenia.
- Numer 2 otrzymuje przewodniczący komisji, w skład której wchodzą wszyscy członkowie stowarzyszenia oprócz członka o numerze 1.
- Numer 3 otrzymuje przewodniczący komisji, w skład której wchodzą wszyscy członkowie stowarzyszenia oprócz członków o numerach 1 i 2,

itd. Wykażemy, że przy takim sposobie przypisania numerów spełniony jest następujący warunek:

(∗) Przewodniczącym dowolnej komisji jest ten spośród jej członków, któremu przydzielony jest najmniejszy numer.

Rzeczywiście, rozpatrzmy dowolną komisję A i niech k będzie najmniejszym z numerów przypisanych członkom tej komisji. Niech B będzie komisją złożoną z wszystkich członków stowarzyszenia, którym przydzielono numery nie mniejsze niż k. Ze sposobu rozdzielenia numerów wynika, że przewodniczącym komisji B jest członek o numerze k. Ponadto komisja B jest sumą dwóch komisji: A oraz $B \setminus A$. Ponieważ członek o numerze k nie należy do komisji $B \setminus A$, więc zgodnie z warunkami zadania musi on być przewodniczącym komisji A.

Określiliśmy więc odwzorowanie, które wyborowi przewodniczących komisji przyporządkowuje sposób przydzielenia członkom stowarzyszenia liczb $1, 2, \ldots, n$. Aby dokończyć rozwiązanie zadania, wskażemy teraz odwzorowanie odwrotne.

Mianowicie, jeżeli członkom stowarzyszenia przypisano liczby $1, 2, \ldots, n$, to w każdej komisji wybieramy na przewodniczącego tego jej członka, który ma najmniejszy numer (warunek (∗) będzie więc spełniony). Jeżeli komisja C jest sumą $C = A \cup B$ dwóch komisji A, B i członek o numerze k jest przewodniczącym komisji C, to należy on do jednej z komisji A, B, w której jest członkiem o najniższym numerze — a więc jest jej przewodniczącym. Widzimy zatem, że warunek dany w treści zadania jest spełniony. Wobec tego jeżeli rozpoczniemy od wyborów przewodniczących komisji, przyporządkujemy członkom stowarzyszenia numery zgodnie z określoną wcześniej zasadą, a następnie z tych numerów „odtworzymy” przewodniczących komisji, to otrzymamy wyjściowy wybór przewodniczących. Podobnie jeżeli rozdzielimy numery członkom stowarzyszenia, na ich podstawie wybierzemy przewodniczących komisji, a potem zgodnie z opisaną procedurą indukcyjną przypiszemy członkom numery, to będą one tożsame z wyjściowymi numerami. W takim razie określone odwzorowania są wzajemnie odwrotne, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **8.** Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności rozpatrywanej sfery odpowiednio ze ścianami SDA, SAB, SBC, SCD. Niech ponadto K', L', M', N' będą odpowiednio punktami przecięcia prostych SK, SL, SM, SN z płaszczyzną $ABCD$.

Z równości $KS = SL$ oraz $AK = AL$ wynika, że trójkąty AKS i ALS są przystające. A zatem

(1) $$\sphericalangle AKK' = 180^\circ - \sphericalangle AKS = 180^\circ - \sphericalangle ALS = \sphericalangle ALL'\,.$$

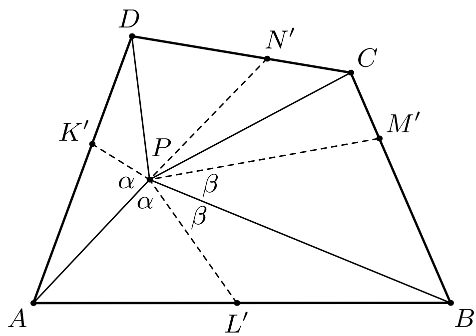
Z kolei z równości $K'K = K'P$ oraz $AK = AP$ wynika, że trójkąty AKK' oraz APK są przystające. Wobec tego $\sphericalangle AKK' = \sphericalangle APK'$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle ALL' = \sphericalangle APL'$.

Łącząc ostatnie dwie równości z zależnością (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle APK' = \sphericalangle APL' = \alpha\,.$$

Rozumując podobnie dostajemy (rys. 2)

$$\sphericalangle BPL' = \sphericalangle BPM' = \beta\,, \quad \sphericalangle CPM' = \sphericalangle CPN' = \gamma\,, \quad \sphericalangle DPN' = \sphericalangle DPK' = \delta\,.$$



rys. 2

Wobec tego

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = \sphericalangle K'PL' + \sphericalangle L'PM' + \sphericalangle M'PN' + \sphericalangle N'PK' = 360^\circ\,,$$

czyli $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Pozostało zauważyć, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ\,,$$

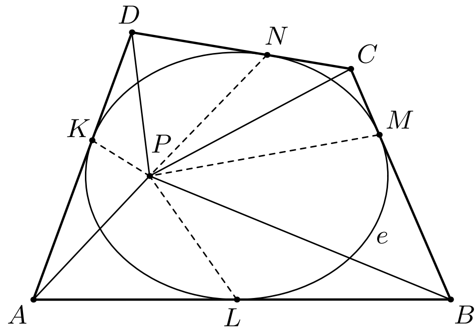
co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Poprowadźmy przez punkt S wszystkie proste, które są styczne do danej sfery s. Proste te wyznaczają stożek t, w który wpisana jest sfera s. Część wspólna stożka t oraz płaszczyzny $ABCD$ jest elipsą e wpisaną w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt P (zob. *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie* — praca zbiorowa, Warszawa 1993).

Oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności elipsy e odpowiednio z bokami DA, AB, BC, CD (rys. 3). Wówczas (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek B, str. 107, twierdzenie 3) otrzymujemy zależności

$$\sphericalangle APK = \sphericalangle APL\,, \ \sphericalangle BPL = \sphericalangle BPM\,, \ \sphericalangle CPM = \sphericalangle CPN\,, \ \sphericalangle DPN = \sphericalangle DPK\,,$$



rys. 3

z których analogicznie jak w sposobie I wynika teza zadania.

Zadanie **9.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą a o następującej własności:
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, $z \geqslant a$ spełniających warunek $x+y+z=3$ prawdziwa jest nierówność

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3.$$

Rozwiązanie

Odpowiedź: $a=-5$.

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą tożsamość:

$$t^3+2\cdot\left(\frac{3-t}{2}\right)^3-3=\frac{3(t+5)(t-1)^2}{4}. \tag{1}$$

Przypuśćmy, że liczba $a \leqslant 1$ ma daną w treści zadania własność. Liczby $x=a$, $y=z=\frac{1}{2}(3-a)$ spełniają warunki x, y, $z \geqslant a$ i $x+y+z=3$, zatem

$$0 \leqslant x^3+y^3+z^3-3=a^3+2\cdot\left(\frac{3-a}{2}\right)^3-3=\frac{3(a+5)(a-1)^2}{4}$$

na mocy (1), skąd wynika nierówność $a \geqslant -5$.

Wykażemy z kolei, że liczba $a=-5$ spełnia warunki zadania. W tym celu rozpatrzmy takie liczby x, y, $z \geqslant -5$, że $x+y+z=3$. Bez ograniczenia ogólności przyjmijmy, że $x \leqslant y \leqslant z$. Suma $y+z$ jest liczbą dodatnią, gdyż w przeciwnym razie wobec $y \leqslant z$ mielibyśmy $x \leqslant y \leqslant 0$, skąd wynikałoby, że $x+y+z \leqslant y+z \leqslant 0$, co przeczy warunkowi $x+y+z=3$. Skoro zaś $y+z>0$, prawdziwa jest nierówność

$$y^3+z^3-2\left(\frac{y+z}{2}\right)^3=\frac{3(y^3-y^2z-yz^2+z^3)}{4}=\frac{3(y-z)^2(y+z)}{4} \geqslant 0,$$

skąd na podstawie tożsamości (1) otrzymujemy ostatecznie

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant x^3+2\left(\frac{y+z}{2}\right)^3=x^3+2\left(\frac{3-x}{2}\right)^3=3+\frac{3(x+5)(x-1)^2}{4} \geqslant 3.$$

Zadanie **10.** Dana jest liczba pierwsza p. Ciąg liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, a_3, ... spełnia warunek

$$(1)\qquad a_{n+1} = a_n + p\left[\sqrt[p]{a_n}\right] \qquad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots.$$

Wykazać, że pewien wyraz tego ciągu jest p-tą potęgą liczby całkowitej. (*Uwaga:* Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.)

Rozwiązanie

Zdefiniujmy ciągi liczb całkowitych nieujemnych b_1, b_2, b_3, ... oraz r_1, r_2, r_3, ... w następujący sposób:

$$b_n^p \leqslant a_n < (b_n+1)^p \qquad \text{oraz} \qquad r_n = a_n - b_n^p$$

dla $n = 1,2,3,\ldots$. Inaczej mówiąc, r_n jest różnicą między wyrazem a_n a największą nie przekraczającą tego wyrazu p-tą potęgą liczby całkowitej. Warunek (1) przepisujemy teraz w postaci

$$(2)\qquad a_{n+1} = a_n + pb_n.$$

Zauważmy, ze jeżeli $r_n = 0$, to $a_n = b_n^p$ jest p-tą potęgą liczby całkowitej. Zadanie będzie więc rozwiązane, jeśli udowodnimy, że $r_n = 0$ dla pewnej wartości n.

Przypuśćmy, że wszystkie wyrazy ciągu $r_1, r_2, r_3, \ldots$ są liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech r_m będzie najmniejszym wśród tych wyrazów. Mamy więc $a_m = b_m^p + r_m$. Ponadto $b_{m-1} < b_m$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy

$$r_{m-1} = a_{m-1} - b_{m-1}^p < a_m - b_{m-1}^p \leqslant a_m - b_m^p = r_m$$

wbrew określeniu m. Zauważmy dalej, że $a_{m-1} < (b_{m-1}+1)^p \leqslant b_m^p \leqslant a_m$ i wobec tego zachodzi nierówność

$$(3)\qquad r_m = a_m - b_m^p < a_m - a_{m-1} = pb_{m-1} < pb_m.$$

Niech ponadto $k > m$ będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $b_k > b_m$. Wówczas $b_m = b_{m+1} = \ldots = b_{k-1}$, więc na mocy (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m + pb_m, \\ a_{m+2} &= a_{m+1} + pb_m, \\ &\ldots \\ a_k &= a_{k-1} + pb_m \end{aligned}$$

i sumując stronami dochodzimy do wniosku, że

$$(4)\qquad a_k = a_m + pb_m(m-k) = b_m^p + pb_m(m-k) + r_m.$$

Wykażemy z kolei, że $b_k = b_m + 1$. Istotnie, gdyby zachodziła nierówność $b_k \geqslant b_m + 2 = b_{k-1} + 2$, mielibyśmy $a_{k-1} < (b_{k-1}+1)^p$, $a_k \geqslant (b_{k-1}+2)^p$ oraz

$$(5)\qquad pb_{k-1} = a_k - a_{k-1} > (b_{k-1}+2)^p - (b_{k-1}+1)^p,$$

ale pisząc $x = b_{k-1}+2$, $y = b_{k-1}+1$ mamy $x-y=1$, $x>y>b_{k-1}$ i widzimy, że

$$x^p - y^p = (x-y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1}) > 1 \cdot py^{p-1} > pb_{k-1}^{p-1} \geqslant pb_{k-1}.$$

Nierówność (5) jest więc fałszywa, co dowodzi równości $b_k = b_m + 1$.

Na mocy (4) możemy zatem napisać

$$(b_m+1)^p + r_k = b_k^p + r_k = a_k = b_m^p + pb_m(m-k) + r_m,$$

czyli

$$r_m - r_k = (b_m+1)^p - b_m^p - pb_m(m-k). \tag{6}$$

Ze wzoru dwumianowego otrzymujemy

$$(b_m+1)^p - b_m^p = \binom{p}{1} b_m^{p-1} + \binom{p}{2} b_m^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} b_m + 1.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc współczynniki dwumianowe $\binom{p}{i}$ są dla $i = 1, 2, \ldots, p-1$ liczbami podzielnymi przez p. Zatem liczba $(b_m+1)^p - b_m^p$ daje resztę 1 z dzielenia przez pb_m. Wobec tego z (6) wynika, że liczba $r_m - r_k$ daje resztę 1 z dzielenia przez pb_m.

W (3) uzyskaliśmy nierówność $r_m < pb_{m-1}$ korzystając jedynie z tego, że $b_{m-1} < b_m$. Analogicznie wyprowadzamy z nierówności $b_{k-1} < b_k$, że $r_k < pb_m$. Liczby r_m i r_k należą więc do przedziału $(0; pb_m)$, a różnica $r_m - r_k$ daje resztę 1 z dzielenia przez pb_m. Wynika stąd, że $r_k = r_m - 1$, co przeczy założeniu, że r_m jest najmniejszym wyrazem w ciągu $r_1, r_2, r_3, \ldots$.

To oznacza, że $r_n = 0$ dla pewnego wskaźnika n, skąd wynika teza.

Zadanie **11.** Punkty $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, BC, CA, AB, BC trójkąta ABC, przy czym spełnione są równości

$$\sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle AP_2P_3 = \sphericalangle P_3P_4B = \sphericalangle CP_4P_5 = \sphericalangle P_5P_6A = \sphericalangle BP_6P_7 = 60^\circ.$$

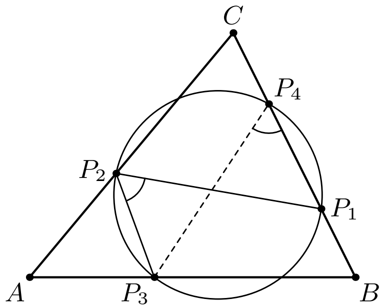
Dowieść, że $P_1 = P_7$.

Rozwiązanie

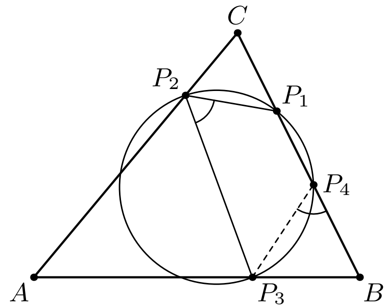
Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie $P_1P_2P_3$.

Z warunków zadania wynika równość $\sphericalangle P_1P_2P_3 = 60^\circ$. To w połączeniu z równością $\sphericalangle P_3P_4B = 60^\circ$ dowodzi, że punkt P_4 leży na okręgu o, niezależnie od tego, czy leży on na odcinku P_1C (rys. 4), czy na odcinku P_1B (rys. 5). Zauważmy ponadto, iż równość $P_1 = P_4$ zachodzi jedynie wtedy, gdy okrąg o jest styczny do boku BC.

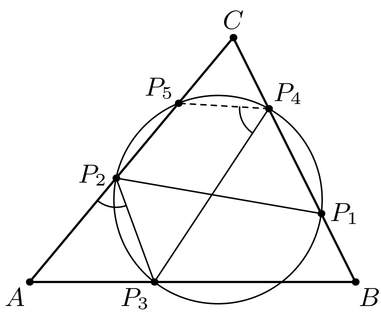
Dalej, na mocy założeń zadania mamy $\sphericalangle P_5P_4P_3 = 60^\circ$ i $\sphericalangle AP_2P_3 = 60^\circ$, skąd wnioskujemy, że punkt P_5 leży na okręgu o, zarówno wtedy, gdy punkt P_5 leży na odcinku P_2C (rys. 6), jak i wtedy, gdy leży on na odcinku P_2A (rys. 7). Tak jak poprzednio, równość $P_2 = P_5$ oznacza, że okrąg o jest styczny do boku CA.



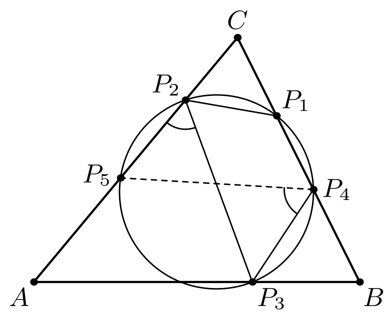
rys. 4



rys. 5



rys. 6



rys. 7

Analogicznie dowodzimy, że punkty P_6 i P_7 leżą na okręgu o. Wynika stąd, że punkty P_1, P_4, P_7 leżą jednocześnie na okręgu o i na boku BC. Jeżeli okrąg ten jest styczny do danego boku, to oczywiście $P_1 = P_4 = P_7$. Jeżeli natomiast okrąg o przecina bok BC w dwóch różnych punktach, to z przeprowadzonego rozumowania otrzymujemy $P_1 \neq P_4$ i $P_4 \neq P_7$, zatem równość $P_1 = P_7$ także jest spełniona.

Zadanie **12.** Dana jest liczba całkowita $m \geqslant 2$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą $n \geqslant m$, że dla każdego rozbicia zbioru $\{m, m+1, \ldots, n\}$ na dwa podzbiory, przynajmniej jeden z tych podzbiorów zawiera takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne), że $ab = c$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n = m^5$.

Załóżmy, że istnieje rozbicie zbioru $\{m, m+1, \ldots, m^5\}$ na dwa podzbiory S i T, z których żaden nie zawiera dwóch liczb (niekoniecznie różnych) wraz z ich iloczynem. Przypuśćmy przy tym, że $m \in S$. Liczba $m^2 = m \cdot m$ jest iloczynem dwóch elementów zbioru S, zatem musimy mieć $m^2 \in T$. Stąd zaś $m^4 = m^2 \cdot m^2 \in S$. Widzimy, że m, $m^4 \in S$, co oznacza, że liczba $m^5 = m \cdot m^4$ należy do zbioru T. Z drugiej strony, liczby m, m^4 są elementami zbioru S, więc liczba m^3 nie może należeć do tego zbioru. Wobec tego m^2, $m^3 \in T$. Otrzymaliśmy zatem m^2, m^3, $m^5 \in T$, czyli mamy sprzeczność.

Z drugiej strony, jeżeli podzielimy zbiór $\{m,m+1,\ldots,m^5-1\}$ na następujące dwa podzbiory:

$$S=\{m,m+1,\ldots,m^2-2,m^2-1,m^4,m^4+1,\ldots,m^5-2,m^5-1\},$$
$$T=\{m^2,m^2+1,\ldots,m^4-2,m^4-1\},$$

to iloczyn dwóch elementów (niekoniecznie różnych) każdego z tych podzbiorów nie jest elementem tego podzbioru. Rzeczywiście, do zbioru T należą liczby nie mniejsze od m^2, a więc iloczyn dowolnych dwóch z nich jest równy co najmniej m^4, zaś największym elementem tego zbioru jest liczba m^4-1. Z kolei do zbioru S należą liczby nie mniejsze od m, więc iloczyn dowolnych dwóch jest równy co najmniej m^2. Iloczyn ten jest mniejszy od m^4, jeżeli obie liczby są mniejsze od m^2, albo jest równy przynajmniej m^5, jeżeli jedna z liczb wynosi co najmniej m^4, i w obu przypadkach nie należy do zbioru S.

Widzimy więc, że liczba $n=m^5-1$ nie spełnia warunków zadania. Tym bardziej liczby $n<m^5-1$ nie spełniają tych warunków, wystarczy bowiem z każdego ze zbiorów S, T utworzonych dla wartości m^5-1 usunąć liczby większe od n. Wobec tego szukaną najmniejszą wartością jest $n=m^5$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`