LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(11 września 2006 r. – 4 grudnia 2006 r.)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2+2yz+5x=2 \\ y^2+2zx+5y=2 \\ z^2+2xy+5z=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Załóżmy najpierw, że istnieją trzy różne liczby rzeczywiste spełniające dany układ równań. Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego otrzymujemy

$$0=(x^2+2yz+5x)-(y^2+2zx+5y)=(x^2-y^2)+2z(y-x)+5(x-y)=$$
$$=(x-y)(x+y-2z+5).$$

Ponieważ przyjęliśmy założenie $x\neq y$, więc z powyższej równości wnioskujemy, że $x+y-2z+5=0$. Analogicznie uzasadniamy, iż $x-2y+z+5=0$ oraz $-2x+y+z+5=0$. Jednakże sumując te trzy równości stronami uzyskamy fałszywą równość $15=0$, toteż przypadek ten jest niemożliwy.

Zatem wśrod liczb x, y, z pewne dwie muszą być równe. Dla ustalenia uwagi będziemy szukać rozwiązań spełniających warunek $x=y$. Pozostałe rozwiązania rozpatrywanego układu równań otrzymamy przez permutacje zmiennych.

Jeżeli $x=y=z$, to dany układ równań sprowadza się do równania kwadratowego $3x^2+5x=2$, które ma dwa rozwiązania: $x=-2$ oraz $x=\frac{1}{3}$. Otrzymujemy stąd trójki $(-2,-2,-2)$ i $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, które oczywiście spełniają dany w treści zadania układ.

Rozważmy z kolei przypadek, gdy $x=y\neq z$. Wykonując rachunek analogiczny do już przeprowadzonego na początku rozwiązania uzyskujemy zależność $0=(y-z)(y+z-2x+5)$, co wobec $y\neq z$ daje $-5=y+z-2x=-x+z$ i $z=x-5$. Zatem pierwsze równanie danego układu przybiera postać

$$0=x^2+2yz+5x-2=x^2+2x(x-5)+5x-2=3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2),$$

co daje wartości $x=y=-\frac{1}{3}$, $z=x-5=-\frac{16}{3}$ oraz $x=y=2$, $z=x-5=-3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójki $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{16}{3})$ i $(2,2,-3)$ są rozwiązaniami badanego układu równań.

Dokonując permutacji zmiennych otrzymamy wszystkie rozwiązania.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y,z) danego układu równań są:

$$(-2,-2,-2),\quad (2,-3,2),\quad (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}),\quad (-\tfrac{1}{3},-\tfrac{16}{3},-\tfrac{1}{3}),$$
$$(2,2,-3),\quad (-3,2,2),\quad (-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{16}{3}),\quad (-\tfrac{16}{3},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}).$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, m, dla których każda z liczb k^2+4m, m^2+5k jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że para (k,m) spełnia warunki zadania.

Jeżeli prawdziwa jest nierówność $m \geqslant k$, to

$$(m+3)^2 = m^2+6m+9 > m^2+5m \geqslant m^2+5k > m^2,$$

a ponieważ m^2+5k jest kwadratem liczby całkowitej, więc wynika stąd, że musi zachodzić jedna z równości $m^2+5k=(m+1)^2$ lub $m^2+5k=(m+2)^2$.

Jeżeli $m^2+5k=(m+1)^2=m^2+2m+1$, to $2m=5k-1$ i na mocy warunków zadania liczba $k^2+4m=k^2+2(5k-1)=k^2+10k-2$ ma być kwadratem liczby całkowitej. Mamy $k^2+10k-2<k^2+10k+25=(k+5)^2$, zatem spełniona jest zależność

$$k^2+10k-2 \leqslant (k+4)^2 = k^2+8k+16,$$

z której otrzymujemy $2k \leqslant 18$ i $k \leqslant 9$. Uwzględniając równość $2m=5k-1$ widzimy, że k musi być liczbą nieparzystą. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że wartości wyrażenia $k^2+10k-2$ dla $k=1$, 3, 5, 7, 9 są odpowiednio równe 9, 37, 73, 117, 169. Uzyskujemy kwadraty liczb całkowitych jedynie dla $k=1$ i $k=9$; odpowiadające wartości $m=\frac{1}{2}(5k-1)$ wynoszą 2 i 22.

Jeżeli $m^2+5k=(m+2)^2=m^2+4m+4$, to $4m=5k-4$, zatem liczba $k^2+4m=k^2+5k-4$ jest kwadratem liczby całkowitej. Nierówność

$$k^2+5k-4 < k^2+6k+9 = (k+3)^2$$

dowodzi, że $k^2+5k-4 \leqslant (k+2)^2 = k^2+4k+4$, co daje $k \leqslant 8$. Ponadto liczba $m=\frac{5}{4}k-1$ jest całkowita, więc liczba k jest podzielna przez 4. Wyrażenie k^2+5k-4 dla wartości $k=4$, 8 przyjmuje odpowiednio wartości 32, 100 i tylko dla $k=8$ otrzymujemy kwadrat liczby całkowitej; odpowiadającą wartością $m=\frac{5}{4}k-1$ jest 9.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $m<k$. Wówczas możemy napisać

$$(k+2)^2 = k^2+4k+4 > k^2+4k > k^2+4m > k^2$$

i z uwagi na to, że k^2+4m jest kwadratem liczby całkowitej, uzyskujemy zależność $k^2+4m=(k+1)^2=k^2+2k+1$, czyli $2k=4m-1$. Ta równość nie może jednak być prawdziwa, bowiem jej lewa strona jest liczbą parzystą, a prawa — nieparzystą. Wobec tego w tym przypadku nie ma rozwiązań.

Wystarczy już tylko wykonać bezpośrednie sprawdzenie, że otrzymane pary istotnie spełniają warunki zadania.

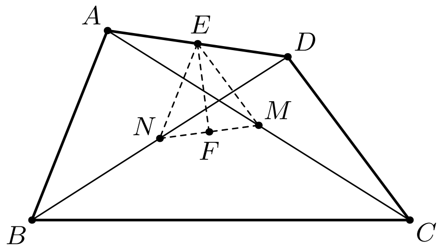
Odpowiedź: Żądaną własność mają następujące pary (k,m):

$$(1,2), \quad (8,9), \quad (9,22).$$

Zadanie **3.** W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, zachodzi równość $AB = CD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą MN są odcinkami o jednakowej długości, równej długości odcinka MN.

Rozwiązanie

Niech punkt E będzie środkiem boku AD, zaś punkt F — środkiem odcinka MN (rys. 1).



rys. 1

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $EM \parallel DC$ oraz $EM = \frac{1}{2}DC$. Analogicznie uzyskujemy zależności $EN \parallel AB$ i $EN = \frac{1}{2}AB$. Stąd i z równości $DC = AB$ otrzymujemy $EM = EN$. Trojkąt MEN jest zatem równoramienny, co oznacza, że $EF \perp MN$. Wobec tego rzutem prostokątnym odcinka EN na prostą MN jest odcinek FN; a ponieważ odcinek AB jest równoległy do odcinka EN i ma dwukrotnie większą długość, więc rzutem odcinka AB na prostą MN będzie odcinek o długości $2 \cdot FN = MN$.

Analogicznie dowodzimy, że rzut prostokątny odcinka CD na prostą MN jest odcinkiem o długości MN, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **4.** Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

Rozwiązanie

Niech z_n będzie liczbą ciągów n-wyrazowych mających żądane własności (będziemy je dalej nazywać *dobrymi* ciągami). Niech x_n będzie liczbą dobrych ciągów $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, których dwa ostatnie wyrazy c_{n-1} i c_n są równe, natomiast y_n niech oznacza liczbę dobrych ciągów $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, w których $c_{n-1} \neq c_n$. Oczywiście spełniona jest równość $z_n = x_n + y_n$.

Każdy dobry ciąg $(n+1)$-wyrazowy $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$, w którym dwa ostatnie wyrazy c_n i c_{n+1} są równe, powstaje z dokładnie jednego dobrego ciągu $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ przez dodanie warunku $c_{n+1} = c_n$. Prawdziwa jest zatem zależność

(1) $$x_{n+1} = z_n = x_n + y_n.$$

Natomiast dobry ciąg $(n+1)$-wyrazowy $(c_1,c_2,\ldots,c_{n+1})$, w którym dwa ostatnie wyrazy c_n i c_{n+1} są różne, możemy otrzymać na dwa sposoby. W pierwszym sposobie należy wziąć dobry n-wyrazowy ciąg $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, w którym $c_{n-1}=c_n$, zaś za c_{n+1} przyjąć dowolną liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,9\}$ różną od c_n. Tak postępując otrzymamy $9x_n$ różnych dobrych ciągów (długości $n+1$). W drugim sposobie wybieramy dobry n-wyrazowy ciąg $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, w którym $c_{n-1}\neq c_n$ i przyjmujemy $c_{n+1}=c_{n-1}$. Tym razem uzyskamy y_n różnych ciągów. Ponadto żaden ciąg nie może być otrzymany oboma sposobami. Wynika stąd równość

$$y_{n+1}=9x_n+y_n. \tag{2}$$

Ze związków (1) i (2) dostajemy

$$3x_{n+1}+y_{n+1}=12x_n+4y_n\,, \quad 3x_{n+1}-y_{n+1}=-6x_n+2y_n\,.$$

Przyjmując oznaczenia $u_n=3x_n+y_n$, $v_n=3x_n-y_n$ mamy więc

$$u_{n+1}=4u_n\,, \quad v_{n+1}=-2v_n \quad \text{dla} \quad n=3,4,5,\ldots\,. \tag{3}$$

Liczba dobrych ciągów (c_1,c_2,c_3), w których $c_2=c_3$, wynosi $10^2=100$, gdyż wartości c_1, c_2 możemy wybrać dowolnie, natomiast liczba dobrych ciągów (c_1,c_2,c_3), w których $c_2\neq c_3$, wynosi $2\cdot 10\cdot 9=180$, bowiem parę różnych liczb (c_2,c_3) można wybrać dowolnie i c_1 musi być równe c_2 lub c_3.

Zatem $x_3=100$, $y_3=180$, $u_3=480$, $v_3=120$ i z zależności (3) przez indukcję otrzymujemy wzory

$$u_n=480\cdot 4^{n-3}=15\cdot 2^{2n-1}\,, \quad v_n=120\cdot(-2)^{n-3}=-15\cdot(-2)^n\,.$$

Stąd ostatecznie

$$z_n=x_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{6}=\frac{15\cdot(2^{2n+1}-(-2)^{n+1})}{6}=5\cdot(4^n+(-2)^n)\,.$$

Odpowiedź: Szukana liczba dobrych ciągów wynosi $5\cdot(4^n+(-2)^n)$.

Zadanie **5.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB=45^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że

$$OK+KH=OL+LH\,.$$

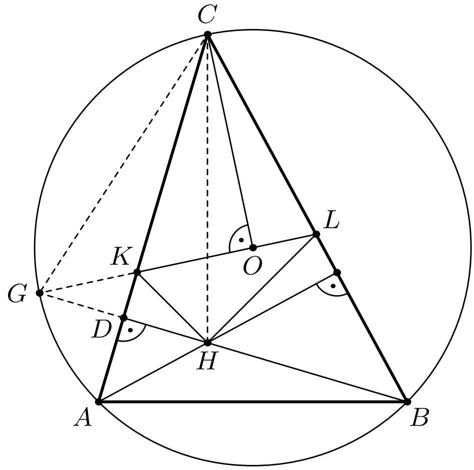
Rozwiązanie

Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka B i niech G będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej AC (rys. 2); odcinki BG i AC przecinają się w punkcie D.

Zauważmy, że punkt G leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Rzeczywiście, ze względu na prostopadłości $BH\perp AC$, $CH\perp AB$ mamy

$$\sphericalangle ACG=\sphericalangle ACH=\sphericalangle ABG\,,$$

a więc punkty A, B, C, G leżą na jednym okręgu.



rys. 2

W trójkącie BCD zachodzą równości $\sphericalangle BCD = 45^\circ$ i $\sphericalangle BDC = 90^\circ$, skąd wyznaczamy $\sphericalangle CBG = 45^\circ$. Zatem $\sphericalangle GOC = 2\sphericalangle GBC = 90^\circ$. Stąd $GO \perp CO$, toteż punkty G, K, O leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Wobec tego

$$OK + KH = OK + KG = OG,$$

czyli wielkość $OK + KH$ jest równa promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC. Analogicznie dowodzimy, że temu promieniowi jest równa wielkość $OL + LH$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **6.** Wykazać, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$a + ab + abc \geqslant 3\sqrt[3]{a \cdot ab \cdot abc} = 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{a^2b}$$

i analogicznie $b + bc + bca \geqslant 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{b^2c}$ oraz $c + ca + cab \geqslant 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{c^2a}$. Stąd wynika, że

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}}\right).$$

Zatem zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy nierówność

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Wprowadzając oznaczenia $x=1/\sqrt[3]{a}$, $y=1/\sqrt[3]{b}$, $z=1/\sqrt[3]{c}$ zapisujemy powyższą nierówność w postaci

$$x^2y+y^2z+z^2x \leqslant x^3+y^3+z^3,$$

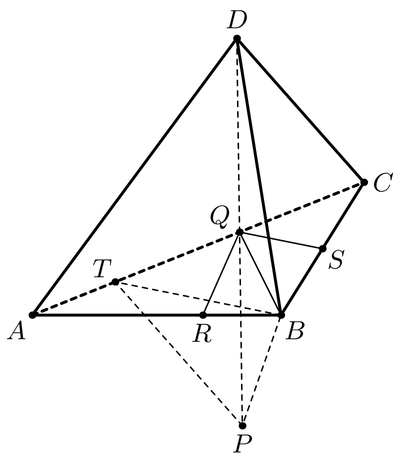
a ta nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności średnich, gdyż

$$x^2y+y^2z+z^2x = \sqrt[3]{x^3\cdot x^3\cdot y^3}+\sqrt[3]{y^3\cdot y^3\cdot z^3}+\sqrt[3]{z^3\cdot z^3\cdot x^3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x^3+x^3+y^3}{3}+\frac{y^3+y^3+z^3}{3}+\frac{z^3+z^3+x^3}{3} = x^3+y^3+z^3.$$

Zadanie **7.** Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q. Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q. Punkt R leży na krawędzi AB, przy czym $BR=\frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP, CD oraz $2\cdot QR$ można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie

Niech S będzie środkiem krawędzi BC, zaś T — punktem symetrycznym do punktu C względem punktu Q (rys. 3).



rys. 3

Ponieważ $BS=\frac{1}{2}BC=BR$, więc punkty R i S leżą symetrycznie względem dwusiecznej BQ kąta ABC, a zatem $QR=QS$. Ponadto trójkąt CTB jest obrazem trójkąta CQS w jednokładności o środku w punkcie C i skali 2, co daje $BT=2\cdot QS=2\cdot QR$. Wreszcie końce odcinków TP i CD są odpowiednio symetryczne do siebie względem punktu Q, skąd $PT=CD$.

Z wyprowadzonych zależności otrzymujemy, że trójkąt BTP jest zbudowany z odcinków o długościach BP, $BT=2\cdot QR$ oraz $PT=CD$, skąd wynika teza (punkty B, T, P nie są współliniowe, bo punkt P leży poza płaszczyzną BCT).

Zadanie **8.** Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka permutacja $(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1})$ zbioru $\{1,2,\ldots,p{-}1\}$, że liczby

$$x_1,\ x_1x_2,\ x_1x_2x_3,\ \ldots,\ x_1x_2...x_{p-1}$$

dają różne reszty przy dzieleniu przez p.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $x_1=1$ oraz dla $i=2,3,\ldots,p{-}1$ niech x_i będzie taką liczbą ze zbioru $\{1,2,\ldots,p{-}1\}$, że liczba $(i-1)x_i-i$ jest podzielna przez p.

Oczywiście musimy najpierw wykazać, że podane określenie liczby x_i jest poprawne, czyli że taka liczba x_i istnieje. W tym celu dla ustalonej wartości $i\in\{2,3,\ldots,p-1\}$ rozpatrzmy liczby

$$(i-1)-i,\ 2(i-1)-i,\ 3(i-1)-1,\ \ldots,\ (p-1)(i-1)-1.$$

Żadna z tych liczb nie daje reszty $p-i$ przy dzieleniu przez p; gdyby bowiem dla pewnego $k\in\{1,2,\ldots,p{-}1\}$ liczba $k(i-1)-i$ dawała resztę $p-i$, to liczba $k(i-1)$ byłaby podzielna przez p, co jest niemożliwe wobec nierówności $0<k<p$, $0<i-1<p-1$ oraz faktu, iż p jest liczbą pierwszą. Analogicznie dowodzimy, że jeśli k, l są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $1\leqslant k<l\leqslant p-1$, to liczba

$$(l(i-1)-i)-(k(i-1)-i)=(l-k)(i-1)$$

nie jest podzielna przez p. To oznacza, że wśród wypisanych $p-1$ liczb żadne dwie nie dają tej samej reszty z dzielenia przez p oraz żadna nie daje reszty $p-i\neq 0$. Wynika stąd, że dokładnie jedna z tych liczb daje resztę 0, czyli dzieli się przez p.

Udowodnimy teraz, że otrzymane w ten sposób liczby x_1, x_2, $\ldots$, x_{p-1} są parami różne. Żadna z liczb x_2, x_3, $\ldots$, x_{p-1} nie jest równa $x_1=1$, gdyż liczba $(i-1)\cdot 1-i=-1$ nie jest podzielna przez p. Przypuśćmy z kolei, że dla pewnych wskaźników $2\leqslant i<j\leqslant p-1$ zachodzi równość $x_i=x_j$. Wtedy liczby $(j-1)x_i-j$ oraz $(i-1)x_i-i$ są podzielne przez p, a więc różnica

$$((j-1)x_i-j)-((i-1)x_i-i)=(j-i)(x_i-1)$$

dzieli się przez liczbę pierwszą p, co jest niemożliwe, gdyż $0<j-i<p-1$, jak również $0<x_i-1<p-1$.

Pozostaje wykazać, że skonstruowane liczby spełniają warunki zadania. W tym celu wykażemy indukcyjnie, że dla $i=1,2,\ldots,p-1$ liczba $x_1x_2...x_i$ daje resztę i z dzielenia przez p. Dla $i=1$ jest to prawda. Załóżmy teraz prawdziwość tej własności dla $i-1$. Liczba $x_1x_2...x_{i-1}-(i-1)$ jest zatem podzielna przez p, a więc i liczba $x_1x_2...x_{i-1}x_i-(i-1)x_i$ dzieli się przez p. Ale z określenia liczby x_i wynika, że liczba $(i{-}1)x_i$ daje resztę i przy dzieleniu przez p. Wobec tego liczba $x_1x_2...x_i$ daje resztę i z dzielenia przez p, co kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Uwaga

Znajomość podstawowych własności arytmetyki liczb (mod p) pozwala znacznie uprościć zapis powyższego rozumowania. Mianowicie przyjmujemy

$$x_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad (i-1)x_i \equiv i \pmod p \quad \text{dla} \;\; i = 2, 3, \ldots, p-1.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc określenie liczby x_i jest poprawne. Jest jasne, że liczby x_2, x_3, ..., x_{p-1} są różne od $x_1 = 1$; ponadto równość $x_i = x_j$ dla pewnych $2 \leqslant i < j \leqslant p-1$ prowadziłaby do zależności

$$ij - i \equiv i(j-1) \equiv (i-1)(j-1)x_i \equiv (i-1)(j-1)x_j \equiv (i-1)j \equiv ij - j \pmod p,$$

co daje oczywistą sprzeczność $i \equiv j \pmod p$. Pozostaje sprawdzić, że dla $i = 2, 3, \ldots, p-1$ mamy

$$(i-1)! \cdot x_1 x_2 ... x_i \equiv x_2 \cdot 2x_3 \cdot 3x_4 \cdot ...(i-1)x_i \equiv 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... i = (i-1)! \cdot i \pmod p,$$

a więc $x_1 x_2 ... x_i \equiv i \pmod p$.

Zadanie **9.** Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m) = F(n)$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie liczby m i n nie istnieją.

Niech $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami ustalonej liczby całkowitej dodatniej n. Wówczas n/d_1, n/d_2, ..., n/d_k także są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n, zatem możemy napisać

$$F(n) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k}.$$

Stąd wynika, że

$$F(n) = \sqrt{d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k \cdot \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k}} = \sqrt{n^k} = n^{k/2} = n^{d(n)/2},$$

gdzie $d(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n.

Przypuśćmy teraz, że dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi równość $F(m) = F(n)$. Wtedy $m^{d(m)/2} = n^{d(n)/2}$, a więc uzyskujemy zależność $m^{d(m)} = n^{d(n)}$. Zatem (patrz: *Uwaga*) liczby m, n są potęgami tej samej liczby całkowitej dodatniej: $m = w^c$ i $n = w^b$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich w, b, c.

Załóżmy, że $c < b$. Wtedy m jest potęgą tej samej liczby całkowitej dodatniej co n, ale o mniejszym wykładniku. Stąd wynika, że $m < n$ oraz — ponieważ każdy dzielnik liczby m jest także dzielnikiem liczby n — zachodzi $d(m) \leqslant d(n)$. Wobec tego $m^{d(m)} < n^{d(n)}$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Podobna sprzeczność powstaje przy założeniu $c > b$. Musi więc być $c = b$, skąd otrzymujemy $m = w^c = w^b = n$.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu skorzystaliśmy z następującego faktu: jeżeli liczby całkowite dodatnie k, l, r, s spełniają równość $k^r=l^s$, to k i l są potęgami tej samej liczby całkowitej dodatniej.

Ażeby to udowodnić, weźmy $a=$NWD(r,s) i niech $r=ab$, $s=ac$; liczby całkowite dodatnie b i c są względnie pierwsze. Ponadto z równości $k^r=l^s$ otrzymujemy $k^b=l^c$. Stąd wynika, że jeżeli p jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby k oraz t jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że k dzieli się przez p^t i nie dzieli sie przez p^{t+1}, to liczba k^b dzieli się przez p^{bt} i nie dzieli się przez p^{bt+1}.

Jednakże k^b jest jednocześnie c-tą potęgą liczby całkowitej l, zatem c musi być dzielnikiem iloczynu bt. Skoro zaś b i c są względnie pierwsze, liczba c musi być dzielnikiem liczby t. Tak więc każdy dzielnik pierwszy liczby k wchodzi do jej rozkładu na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielnym przez c, przeto k jest c-tą potęgą liczby całkowitej. Wobec tego z równości $k^b=l^c$ wynika, że $l=(\sqrt[c]{k})^b$, czyli k i l są potęgami liczby całkowitej $\sqrt[c]{k}$.

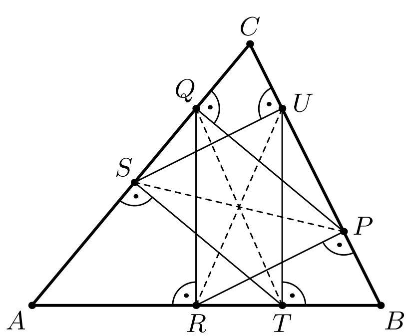
Zadanie **10.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty P i U leżą na boku BC, punkty Q i S leżą na boku CA, punkty R i T leżą na boku AB, przy czym

$$PR\perp BC,\quad QP\perp CA,\quad RQ\perp AB,$$
$$US\perp BC,\quad ST\perp CA,\quad TU\perp AB.$$

Dowieść, że trójkąty PQR i STU są przystające.

Rozwiązanie

Skoro $PR\perp BC$ oraz $US\perp BC$, to $PR\parallel US$. Analogicznie $QP\parallel ST$ oraz $RQ\parallel TU$. Trójkąty PQR i TUS są więc podobne, jako trójkąty o odpowiednich bokach równoległych (rys. 4).



rys. 4

Z trójkątów prostokątnych PUS i RPU odczytujemy zależności

$$PS^2-US^2=PU^2=RU^2-PR^2\,.$$

Zachodzi więc równość

$$(1) \qquad PR^2 - US^2 = RU^2 - PS^2\,.$$

Podobnie rozważając trójkąty prostokątne QST i PQS oraz RTU i QRT uzyskujemy analogiczne równości

$$(2) \qquad QP^2 - ST^2 = PS^2 - QT^2\,,$$

$$(3) \qquad RQ^2 - TU^2 = QT^2 - RU^2\,.$$

Dodając równości (1), (2), (3) stronami otrzymujemy zależność

$$(4) \qquad (PR^2 + QP^2 + RQ^2) - (US^2 + ST^2 + TU^2) = 0\,.$$

Jeśli przez k oznaczymy skalę podobieństwa trójkątów PQR i TUS, tzn. $PR = k\cdot ST$, $QP = k\cdot TU$, $RQ = k\cdot US$, to z równości (4) wynika natychmiast, że $k=1$. A to znaczy, że trójkąty PQR i TUS są przystające.

Zadanie **11.** Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1, x_2, \ldots, x_{6n-1})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 6n-1\}$, spełniających warunki:

jeśli $i - j = 2n+1$, to $x_i > x_j$;

jeśli $i - j = 4n$, to $x_i < x_j$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest $\binom{6n-1}{3n+1}$.

Dla dowolnej permutacji spełniającej warunki zadania zachodzą następujące ciągi nierówności

$$(1) \qquad \begin{aligned} &x_{2n} < x_{4n+1} < x_1 < x_{2n+2} < x_{4n+3} < x_3 < x_{2n+4} < x_{4n+5} < \ldots \\ &\qquad < x_{2n-3} < x_{4n-2} < x_{6n-1} < x_{2n-1} < x_{4n}, \end{aligned}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} &x_{2n+1} < x_{4n+2} < x_2 < x_{2n+3} < x_{4n+4} < x_4 < x_{2n+5} < x_{4n+6} < \ldots \\ &\qquad < x_{2n-4} < x_{4n-3} < x_{6n-2} < x_{2n-2} < x_{4n-1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że każdy z elementów x_1, x_2, …, x_{6n-1} został w rozważanych wierszach wypisany dokładnie raz. Rzeczywiście, w nierównościach (1) pojawiły się wszystkie wskaźniki nieparzyste z przedziału $\langle 1; 2n-1\rangle$, parzyste z przedziału $\langle 2n; 4n\rangle$ i nieparzyste z przedziału $\langle 4n+1; 6n-1\rangle$, w nierównościach (2) zaś — wszystkie wskaźniki parzyste z przedziału $\langle 2; 2n-2\rangle$, nieparzyste z przedziału $\langle 2n+1; 4n-1\rangle$ i parzyste z przedziału $\langle 4n+2; 6n-2\rangle$. Badając ilość liczb parzystych i nieparzystych w odpowiednich przedziałach obliczamy, że w związku (1) występuje $n+(n+1)+n = 3n+1$ liczb, a w związku (2) występuje $(n-1)+n+(n-1) = 3n-2$ liczb.

Nietrudno spostrzec, że każda nierówność postaci $x_i < x_j$ lub $x_i > x_j$ dająca się wywnioskować z warunków zadania znajduje się w zależności (1) lub (2). To oznacza, że jeżeli dla pewnej permutacji oba te ciągi nierówności są spełnione, to permutacja ta ma postulowane własności. Wobec tego każda permutacja spełniająca warunki zadania jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie $3n+1$ liczb wypisanych w nierównościach (1) — należy bowiem uszeregować je rosnąco, za x_{2n} przyjąć najmniejszą z tych liczb, za x_{4n+1} liczbę bezpośrednio po niej następującą itd., co pozwala jednoznacznie określić wyrazy permutacji znajdujące się w związkach (1); pozostałe $3n-2$ liczb po ustawieniu w kolejności rosnącej analogicznie określają wyrazy permutacji znajdujące się w związkach (2).

Zatem liczba permutacji mających żądaną własność jest równa liczbie $(3n+1)$-elementowych podzbiorów zbioru $(6n-1)$-elementowego, czyli liczbie

$$\binom{6n-1}{3n+1}.$$

Zadanie **12.** Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a;b\rangle$ (gdzie $a<b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$, że

$$W(x)=P(x)^2+(x-a)(b-x)\sum_{i=1}^{m}Q_i(x)^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na stopień wielomianu W.

Jeżeli $W(x)\equiv c$ jest wielomianem stałym, to oczywiście $c>0$ i w tym przypadku można przyjąć $P(x)\equiv\sqrt{c}$, $m=1$ i $Q_1(x)\equiv 0$.

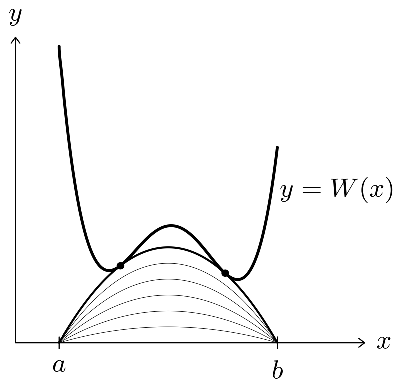
Przypuśćmy teraz, że teza zadania jest prawdziwa dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego niż n i niech W będzie wielomianem stopnia n.

Funkcja

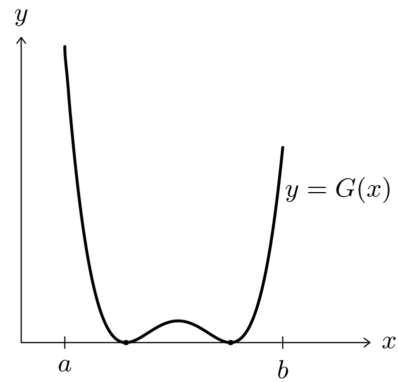
$$f(x)=\frac{W(x)}{(x-a)(b-x)}\ ,$$

rozważana w przedziale $(a;b)$, jest ciągła i przyjmuje w nim wartości dodatnie, które przy końcach przedziału dążą do nieskończoności. Zatem w pewnym punkcie (niekoniecznie jednym) funkcja f osiąga swoją wartość minimalną c; jest to liczba dodatnia.

Zachodzi wobec tego nierówność $f(x)\geqslant c$, czyli $W(x)\geqslant c(x-a)(b-x)$ dla $x\in\langle a;b\rangle$, która w pewnym punkcie (punktach) staje się równością. Mówiąc obrazowo, c jest liczbą, dla której parabola $y=c(x-a)(b-x)$ w przedziale $\langle a;b\rangle$ jest „styczna od dołu” do wykresu wielomianu W na tym przedziale, być może w kilku punktach (rys. 5). Tak więc wielomian $G(x)=W(x)-c(x-a)(b-x)$ w badanym przedziale przyjmuje wartości nieujemne i posiada przynajmniej jeden pierwiastek (rys. 6).



rys. 5



rys. 6

Zauważmy, że $G(a)=W(a)$ i $G(b)=W(b)$, a więc wielomian G na końcach przedziału przybiera wartości dodatnie. Zatem pierwiastki wielomianu G w przedziale $(a;b)$ mają parzystą krotność. Istnieją zatem takie liczby (niekoniecznie różne) $g_1,g_2,\ldots,g_k\in(a;b)$, że wielomian G ma postać

$$G(x)=(x-g_1)^2(x-g_2)^2...(x-g_k)^2H(x),$$

przy czym wielomian H w przedziale $\langle a;b\rangle$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Oznaczmy $B(x)=(x-g_1)(x-g_2)...(x-g_k)$; mamy więc $G(x)=B(x)^2H(x)$.

Jeśli m jest stopniem wielomianu G, to $m\leqslant n$, z wyjątkiem sytuacji, gdy $n=1$, kiedy to $m=2$. Ponadto wielomian H ma stopień nie większy niż $m-2$. Zatem w każdym przypadku H jest wielomianem stopnia niższego niż W. Wobec tego na mocy założenia indukcyjnego istnieje przedstawienie postaci

$$H(x)=P(x)^2+(x-a)(b-x)\sum_{i=1}^{m}Q_i(x)^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}W(x)&=G(x)+c(x-a)(b-x)=B(x)^2H(x)+c(x-a)(b-x)=\\&=B(x)^2\left(P(x)^2+(x-a)(b-x)\sum_{i=1}^{m}Q_i(x)^2\right)+c(x-a)(b-x)=\\&=(B(x)P(x))^2+(x-a)(b-x)\left((\sqrt{c})^2+\sum_{i=1}^{m}(B(x)Q_i(x))^2\right)\end{aligned}$$

i jest to żądane przedstawienie wielomianu W. Tym samym rozwiązanie zadania zostało zakończone.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`